ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVI 1978 1

УДК 5.19.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян

О периоде занятости общей одноканальной системы массового обслуживания

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 30/VI 1977)

1°. Методы исследования одноканальных систем массового обслуживания с ожиданием, несколькими пуассоновскими потоками и общим распределением обслуживания позволяют получать преобразования Лапласа от распределений периодов занятости и числа обслуженных за периоды занятости вызовов. Но вопрос прямого обращения этих преобразований до сих пор остается открытым ([1]).

Совместное распределение периода занятости и числа обслуженных за период занятости вызовов для системы с одним пуассоновским потоком и ожиданием, при общем распределении длительности обслуживания вызовов найдено в явном виде Прабху ([2]). В настоящей заметке изучается распределение периода занятости и числа вызовов разных типов, обслуженных за этот период занятости, в общей одноканальной системе с ожиданием и несколькими потоками вызовов. Используемый метод может быть применен для изучения распределений периодов занятости многих приоритетных систем.

Рассмотрим систему массового обслуживания с ожиданием, r независимыми пуассоновскими потоками вызовов $L_1, L_2, \ldots, L_r$ и одним обслуживающим прибором. Параметр потока $L_i (i=\overline{1, r}) - a_i > 0$. Случайная длительность обслуживания вызовов потока L_i (i-вызовов) β_i с функцией распределения (ф. р.) $B_i(t)$ представима в виде суммы q_i ($i=\overline{1, r}$; $q_i \geq 1$) независимых случайных величин (сл. в.): $\beta_i \overset{d}{=} \beta_i^{(1)} + \ldots + \beta_i^{(q_i)}$. Положим: $P\{\beta_i^{(j)} < t\} = B_i^{(j)}(t)$. Длительности обслуживания независимы и не зависят от процесса поступления. Будем говорить, что сл. в. $\beta_i^{(j)}$ является j-фазой i-вызова.

Пусть с момента $t=0$, в который в системе присутствуют m_i нетронутых обслуживанием i-вызовов, время $x \geq 0$ прибор заперт для обслуживания ($i=\overline{1, r}$; $m_i \geq 0$).

Обозначим через $\pi(x;\ m^{(r)})$, где $m^{(r)}=(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_r)$, первый момент $\geqslant x$ отсутствия вызовов в системе. Сл. в. $\pi(x;\ m^{(r)})$ — период занятости со временем задержки $x\geqslant 0$, инициированный m_1 1-вызовами, . . ., m_r r-вызовами. Далее, $S(n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})$, где $n^{(r)}=(n_1,\ \ldots,\ n_r)$; $q^{(r)}=(q_1,\ \ldots,\ q_r)$; $t^{(q^{(r)})}=(t_1^{(q_1)},\ \ldots,\ t_r^{(q_r)})$; $t_k^{(q_k)}=(t_{k1},\ \ldots,\ t_{kq_k})$, $t_{kj}\geqslant 0$; $n_k\geqslant 0$, есть следующее событие: $\{n_k$ k — вызовов обслужено и суммарная длительность j-фаз этих k-вызовов $<t_{kj}$ $(k=\overline{1,\ r};\ j=\overline{1,\ q_k};\ q_k\geqslant 1)\}$.

Наша цель заключается в вычислении вероятности $\Pi_{m^{(r)}}(x;\ n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})$ того, что за период занятости $\pi(x;\ m^{(r)})$ осуществилось событие $S(n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})$.

2°. Очевидно, $\Pi_{m^{(r)}}(x;\ n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})=0$, если существует такое i $(i=\overline{1,\ r})$, что $m_i>n_i$. Положим: $t=x+|t_1^{(q_1)}|+\ldots+|t_r^{(q_r)}|$; $|t_i^{(q_i)}|=t_{i1}+t_{i2}+\ldots+t_{iq_i}$; $\sigma=a_1+\ldots+a_r$; $d^+_{t^{(q^{(r)})}}=\prod\limits_{k=1}^{r}{}^{+}d_{t_k^{(q_k)}}$; $d_{t_i^{(q_i)}}=\prod\limits_{j=1}^{q_i}d_{t_{ij}}$ $(i=\overline{1,\ r};\ q_i\geqslant 1)$, $0^{(r)}=(\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{r})$, d — знак дифференциала.

Здесь и ниже $\prod\limits_{k=1}^{r}{}^{+}$ означает, что произведение берется по тем k, для которых $n_k>0$. Тогда ($*$ — знак свертки)

$$d^+_{t^{(q^{(r)})}}\Pi_{n^{(r)}}(x;\ n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})=\exp\{-\sigma\cdot t\}\prod_{k=1}^{r}{}^{+}\prod_{j=1}^{q_k}d_{t_{kj}}[B_k^{(j)}(t_{kj})]_*^{n_k}.$$

Теорема 1. *Если* $n_k\geqslant 0;\ t_{kj}\geqslant 0;\ B_k^{(j)}(+0)=0$ $(k=\overline{1,\ r};\ j=\overline{1,\ q_k};\ q_k\geqslant 1)$, $|n^{(r)}|=n_1+\ldots+n_r>0$, *то*

$$d^+_{t^{(q^{(r)})}}\Pi_{0^{(r)}}(x;\ n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})=\exp\{-\sigma\cdot t\}\,x\cdot t^{|n^{(r)}|-1}\prod_{k=1}^{r}{}^{+}\left\{\frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\prod_{j=1}^{q_k}d_{t_{kj}}\times\right.$$
$$\left.\times[B_k^{(j)}(t_{kj})]_*^{n_k}\right\}. \qquad (1)$$

Доказательство. Имеют место следующие рекуррентные соотношения

$$d^+_{t^{(q^{(r)})}}\Pi_{0^{(r)}}(x;\ n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})=\sum_{k=1}^{r}{}^{+}a_k\int\limits_{\tau=0}^{x}\exp\{-\sigma\tau\}d\tau\left\{\prod_{j=1}^{q_k}\int\limits_{z_{kj}=0}^{t_{kj}}d_{z_{kj}}B_k^{(j)}(z_{kj})\right\}\times$$
$$d^+_{t^{(q^{(r)})}}\Pi_{0^{(r)}}(x+|z_k^{(q_k)}|-\tau;\ n_1,\ \ldots,\ n_{k-1},\ n_k-1,\ n_{k+1},\ \ldots,\ n_r; \qquad (2)$$
$$t_1^{(q_1)},\ \ldots,\ t_{k-1}^{(q_{k-1})},\ (t_{k1}-z_{k1},\ \ldots,\ t_{kq_k}-z_{kq_k}),\ t_{k+1}^{(q_{k+1})},\ \ldots,\ t_r^{(q_r)}),$$

где $\sum\limits_{k=1}^{r}{}^{+}$ означает, что суммирование производится по тем k, для которых

$n_k>0$ $(k=\overline{1,\ r})$ и $z_k^{(q_k)}=(z_{k1},\ z_{k2},\ \ldots,\ z_{kq_k})$, $|z_k^{(q_k)}|=z_{k1}+z_{k2}+\ldots+z_{kq_k}$.

Докажем (1) методом математической индукции. Утверждение (1) в частном случае $r=1$, $q_1=1$ доказано Прабху (²). Допустим (1) справедливо при $|n^{(r)}|=N-1$ и докажем (1) для $|n^{(r)}|=N$ $(N>1)$.

По индуктивному предположению, если $|n^{(r)}|=N$, то из (2) получаем

$$d^+_{t^{(q^{(r)})}}\Pi_{q^{(r)}}(x;\ n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})=\exp\{-\sigma t\}\cdot\left\{\prod_{k=1}^{r}\frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\right\}\cdot$$

$$\sum_{k=1}^{r}{}^{+}\, n_k\int_{\tau=0}^{x}d\tau\left\{\delta_{n_k1}(x+|t_k^{(q_k)}|-\tau)(t-\tau)^{N-2}\prod_{m=1}^{r}{}^{+}\left\{\prod_{j=1}^{q_m}d_{t_{mj}}[B_m^{(j)}(t_{mj})]_*^{n_m}\right\}+\right.$$

$$+(1-\delta_{n_k1})\left\{\prod_{j=1}^{q_k}\int_{z_{kj}=0}^{t_{kj}}d_{z_{kj}}B_k^{(j)}(z_{kj})\right\}\left\{(x+|z_k^{(q_k)}|-\tau)(t-\tau)^{N-2}\times\right.$$

$$\left.\left.\prod_{m=1}^{r}{}^{+}\left\{\prod_{j=1}^{q_m}d_{t_{mj}}[B_k^{(j)}(t_{mj}-\delta_{mk}z_{mj})]_*^{n_m-\delta_{mk}}\right\}\right\}\right\},$$

где δ_{mk}—символ Кронекера. Продолжаем подсчет, используя тождество

$$\int_0^t zd_z[B(z)]_*^m d_t[B(t-z)]_*^n=\frac{mt}{m+n}\,d_t[B(t)]_*^{m+n},$$

выполненное для любой ф. р. $B(t)$, $B(+0)=0$, и натуральных чисел $m>0$ и $n>0$.

Таким образом, имеем

$$d^+_{t^{(q^{(r)})}}\Pi_{q^{(r)}}(x;\ n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})=\exp\{-\sigma\cdot t\}\left\{\prod_{k=1}^{r}\frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\right\}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{r}n_k\int_{\tau=0}^{x}(t-\tau)^{N-2}\left\{\delta_{n_k1}\left(x+\sum_{j=1}^{q_k}t_{kj}-\tau\right)\prod_{m=1}^{r}{}^{+}\left\{\prod_{j=1}^{q_m}d_{t_{mj}}[B_m^{(j)}(t_{mj})]_*^{n_m}\right\}+\right.$$

$$(1-\delta_{n_k1})\int_{z_{k1}=0}^{t_{k1}}\cdots\int_{z_{kq_k}=0}^{t_{kq_k}}\left(x+\sum_{j=1}^{q_k}z_{kj}-\tau\right)\left\{\prod_{j=1}^{q_k}d_{z_{kj}}B_k^{(j)}(z_{kj})d_{t_{kj}}[B_k^{(j)}(t_{kj}-z_{kj})]_*^{n_k-1}\right\}\cdot$$

$$\left.\left\{\prod_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{r}{}^{+}\prod_{j=1}^{q_m}d_{t_{mj}}[B_m^{(j)}(t_{mj})]_*^{n_m}\right\}\right\}d\tau=$$

$$\exp\{-\sigma t\}\left\{\prod_{k=1}^{r}{}^{+}\frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\prod_{j=1}^{q_k}d_{t_{kj}}[B_k^{(j)}(t_{kj})]_*^{n_k}\right\}\left\{\int_{\tau=0}^{x}(t-\tau)^{N-2}\left[(x-\tau)N+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{r}(n_k\delta_{n_k1}+(1-\delta_{n_k1}))\sum_{j=1}^{q_k}t_{kj}\right]d\tau\right\}=$$

$$\exp\{-\sigma t\}\left\{\prod_{k=1}^{r}{}^{+}\frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\prod_{j=1}^{q_k}d_{t_{kj}}[B_k^{(j)}(t_{kj})]_*^{n_k}\right\}\left\{\int_{\tau=0}^{x}(t-\tau)^{N-2}[(x-\tau)N+(t-x)]d\tau\right\}=$$

$$=\exp\{-\sigma\cdot t\}xt^{N-1}\left\{\prod_{k=1}^{r}{}^{+}\frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\prod_{j=1}^{q_k}d_{t_{kj}}[B_k^{(j)}(t_{kj})]_*^{n_k}\right\},$$

что и т. д.

3°. Теперь мы в состоянии найти выражение для $\Pi_{m^{(r)}}(x;\ n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})$ при $|m^{(r)}|=m_1+m_2+\ .\ .\ .\ +m_r>0$.

Следствие 1. *Если* $n_i>m_i\geqslant 0$, $B_i^{(j)}(+0)=0(i=\overline{1,\ r};\ j=\overline{1,\ q_i};\ q_i\geqslant 1)$, $|n^{(r)}|>0$, *то*

$$d_{t^{(q^{(r)})}}\Pi_{m^{(r)}}(x;\ n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})=\exp\{-\sigma\cdot t\}t^{|n^{(r)}|-|m^{(r)}|-1}\left\{x+\sum_{k=1}^{r}{}^{++}\frac{m_k}{n_k}|t_k^{(q_k)}|\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\prod_{k=1}^{r}{}^{+}\frac{a_k^{n_k-m_k}}{(n_k-m_k)!}\prod_{j=1}^{q_k}d_{t_{kj}}[B_k^{(j)}(t_{kj})]_*^{n_k}\right\},\tag{3}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{r}{}^{++}$ *означает, что суммирование производится по тем* k, *для которых* $m_k>0$ $(k=\overline{1,\ r})$.

Доказательство. Докажем (3) в случае $0<m_i<n_i$ $(i=\overline{1,\ r})$. Положим $(k=\overline{1,\ r};\ q_k\geqslant 1)$

$$d_{t^{(q^{(r)})}}=\prod_{k=1}^{r}d_{t_k^{(q_k)}};\ u_k^{(q_k)}=(u_{k1},\ u_{k2},\dots,\ u_{kq_k});\ u^{(q^{(r)})}=(u_1^{(q_1)},\ u_2^{(q_2)},\dots,u_r^{(q_r)});$$

$$n^{(r)}-m^{(r)}=(n_1-m_1,\ n_2-m_2,\ .\ .\ .,\ n_r-m_r);\quad t_k^{(q_k)}-u_k^{(q_k)}=(t_{k1}-u_{k1},$$

$$t_{k2}-u_{k2},\ .\ .\ .,\ t_{kq_k}-u_{kq_k});\ t^{(q^{(r)})}-u^{(q^{(r)})}=(t_1^{(q_1)}-u_1^{(q_1)},\ t_2^{(q_2)}-u_2^{(q_2)},\ .\ .\ .,$$

$$.\ .\ .,\ t_r^{(q_r)}-u_r^{(q_r)}).$$

Нетрудно видеть $(|u^{(q^{(r)})}|=|u_1^{(q_1)}|+\ .\ .\ .\ +|u_r^{(q_r)}|,\ |u_k^{(q_k)}|=u_{k1}+u_{k2}+\ .\ .\ .$

$$.\ .\ .\ +\ u_{kq_k},\ k=\overline{1,\ r})$$

$$d_{t^{(q^{(r)})}}\Pi_{m^{(r)}}(x;\ n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})=$$

$$\int_{u_{11}=0}^{t_{11}}\cdots\int_{u_{rq_r}}^{t_{rq_r}}d_{t^{(q^{(r)})}}\Pi_{0^{(r)}}(x+|u^{(q^{(r)})}|;\ n^{(r)}-m^{(r)};\ t^{(q^{(r)})}-u^{(q^{(r)})})\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{r}\prod_{j=1}^{q_k}d_{u_{kj}}[B_k^{(j)}(u_{kj})]_*^{m_k}\right\}=\exp\{-\sigma t\}t^{|n^{(r)}|-|m^{(r)}|-1}\int_{u_{11}=0}^{t_{11}}\cdots\int_{u_{rq_r}=0}^{t_{rq_r}}(x+|u^{(q^{(r)})}|)\times$$

$$\left\{\prod_{k=1}^{r}\frac{a_k^{n_k-m_k}}{(n_k-m_k)!}\prod_{j=1}^{q_k} d_{u_{kj}}[B_k^{(j)}(u_{kj})]_*^{m_k} d_{t_{kj}}[B_k^{(j)}(t_{kj}-u_{kj})]_*^{n_k-m_k}\right\} =$$

$$= \exp\{-\sigma t\}\, t^{|n^{(r)}|-|m^{(r)}|-1}\left\{x+\sum_{k=1}^{r}\frac{m_k}{n_k}\sum_{j=1}^{q_k} t_{kj}\right\}\left\{\prod_{k=1}^{r}\frac{a_k^{n_k-m_k}}{(n_k-m_k)!}\prod_{j=1}^{q_k} d_{t_{kj}}(B_k^{(j)}(t_{kj}))_*^{n_k}\right\},$$

что и т. д.

Следствие 2. *Если* $n_k \geqslant m_k \geqslant 0$, $B_k^{(j)}(t) = \dfrac{1}{\Gamma(b_{kj})}\displaystyle\int_0^t x^{b_{kj}-1}e^{-x}dx$ $(b_{kj}>1;\ k=\overline{1,r};\ j=\overline{1,q_k};\ q_k \geqslant 1)$, *где* $\Gamma(b_{kj})$ — *гамма-функция*, $|n^{(r)}|>0$ *и сохраняются обозначения следствия* 1, *то*

$$d^+_{t^{(q^{(r)})}}\Pi_{m^{(r)}}(x;\, n^{(r)};\, t^{(q^{(r)})}) = \exp\{-\sigma\cdot t\}\, t^{|n^{(r)}|-|m^{(r)}|-1}\left\{x+\sum_{k=1}^{r}{}^{+}\frac{m_k}{n_k}\,|t_k^{(q_k)}|\right\}\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{r}{}^{+}\frac{a_k^{n_k-m_k}}{(n_k-m_k)!}\prod_{j=1}^{q_k}\frac{t_{kj}^{n_k b_{kj}-1}e^{-t_{kj}}}{\Gamma(n_k b_{kj})}\, dt_{kj}\right\}.$$

Следствие 3. *Если* $n_k \geqslant m_k \geqslant 0$; $q_1 = \ldots = q_r = 1$; $B_k(t) = [1-e^{-b_{k1}\cdot t}] * \ldots * [1-e^{-b_{kd_k}t}]$, $(b_{ki}>0;\ k=\overline{1,r};\ d_k \geqslant 1)$, *где* b_{ki} *попарно различны по* i; $d^+_{t^{(r)}} = \prod_{k=1}^{r}{}^{+} d_{t_k}$; $t^{(r)} = (t_1, \ldots, t_r)$, $t = x+t_1+\ldots+t_r$; $|n^{(r)}|>0$, *то*

$$d^+_{t^{(q^{(r)})}}\Pi_{m^{(r)}}(x;\, n^{(r)};\, t^{(r)}) = \exp\{-\sigma\cdot t\}\, t^{|n^{(r)}|-|m^{(r)}|-1}\left\{x+\sum_{k=1}^{r}{}^{+}\frac{m_k}{n_k}\,t_k\right\}\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{r}{}^{+}\frac{a_k^{n_k-m_k}}{(n_k-m_k)!}\left[\sum_{p=1}^{d_k}(-1)^{p-1}\sum_{j=1}^{p}\frac{b_{k1}b_{k2}\ldots b_{kp-1}}{\prod\limits_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{p}(b_{kj}-b_{kn})}\exp\{-b_{kj}\cdot t_k\}-1\right]dt_k\right\}$$

Ниже будем рассматривать лишь частный случай $q_1 = \ldots = q_r = 1$.

4°. Заметим, что условие $B_l(+0)=0$ $(l=\overline{1,r})$ не является необходимым. Положим $0<\alpha_l=B_l(+0)<1$. Каждый l—вызов $(l=\overline{1,r})$ с вероятностью α_l обслуживается „мгновенно" и с вероятностью $1-\alpha_l$ имеет ненулевую длительность обслуживания. Таким образом, поток l-вызовов $(l=\overline{1,r})$ подразделяется на два независимых пуассоновских потоков вызовов с параметрами $a_l\alpha_l$ (с мгновенным обслуживанием) и $a_l(1-\alpha_l)$ (с ненулевой длительностью обслуживания), вызовы которых называем 1, l-вызовами и 2, l-вызовами соответственно. Ф. р. длительности обслуживания 2, l-вызова равна: $\dfrac{B_l(t)-\alpha_l}{1-\alpha_l}$.

Обозначим через $S(n_1^{(r)};\, n_2^{(r)};\, t^{(r)})$, где $n_i^{(r)} = (n_{i1}, \ldots, n_{ir})$, следующее событие: $\{n_{lj}$ l, j—вызовов обслужено и суммарная длительность обслуживания j-вызовов $<t_j$ $(l=1,2;\ j=\overline{1,r})\}$.

Пусть $\Pi_{m^{(r)}}(x;\, n_1^{(r)};\, n_2^{(r)};\, t^{(r)})$ — вероятность того, что за $\pi(x;\, m^{(r)})$

осуществилось событие $S(n_1^{(r)}, n_2^{(r)}; t^{(r)})$. Положим: $m_i^{(r)}=(m_{i1}, \ldots, m_{ir})$ $(i=1, 2)$. Поскольку к 2, i—вызовам $(i=\overline{1, r})$ применимо следствие 1, то справедливо утверждение

Следствие 4. *Пусть* $|n_i^{(r)}|=n_{i1}+\ldots+n_{ir}$ $(i=1, 2)$. *Если* $|n_1^{(r)}|>0$, *то*

$$d^+_{t^{(r)}}\Pi_{m^{(r)}}(x; n_1^{(r)}; n_2^{(r)}; t^{(r)})=\exp\{-\sigma\cdot t\}\sum_{(\gamma)}\left\{\prod_{k=1}^{r}\frac{a_k^{n_{2k}-m_{2k}}}{(n_{2k}-m_{2k})!}\frac{m_k!}{m_{1k}!\,m_{2k}!}a_k^{n_{2k}}\right\}\cdot$$

$$\left\{\prod_{k=1}^{r}{}^{+}\frac{a_k^{n_{1k}-m_{1k}}}{(n_{1k}-m_{1k})!}d_{t_k}[B_k(t_k)]_*^{n_{1k}}\left\{x+\sum_{k=1}^{r}{}^{0}\frac{m_{1k}}{n_{1k}}t_k\right\}\cdot t^{|n_1^{(r)}|-|m_1^{(r)}|-1}\right.,$$

где (γ) *означает условие:* $\{m_1^{(r)}+m_2^{(r)}=m^{(r)};\quad n_{ji}\geqslant m_{ji}\geqslant 0\}$, *а* $\sum\limits_{k=1}^{r}{}^{0}$ *есть суммирование по тем* k, *для которых* $m_{1k}>0$.

5°. Положим: $\hat{\Pi}(n^{(r)}; t^{(r)})\overset{\text{def}}{=}\sum\limits_{k=1}^{r}\frac{a_k}{\sigma}\Pi_{(\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k-r})}(0; n^{(r)}; t^{(r)})$ есть вероятность того, что за период занятости, начавшийся с обслуживания одного вызова, обслужено n_i i-вызовов $(i=\overline{1, r})$ и суммарная длительность обслуживания i-вызовов $<t_i$. Тогда $(n_k\geqslant 0;\ t_k\geqslant 0;$ $|n^{(r)}|>0;\ B_k(+0)=0;\ k=\overline{1, r};\ |t^{(r)}|=t_1+\ldots+t_r)$

$$d^+_{t^{(r)}}\hat{\Pi}(n^{(r)}; t^{(r)})=\sigma^{-1}\exp\{-\sigma|t^{(r)}|\}(|t^{(r)}|)^{|n^{(r)}|-1}\left\{\prod_{k=1}^{r}{}^{+}\frac{a_k^{n_k}}{n_k!}d_{t_k}[B_k(t_k)]_*^{n_k}\right\}. \quad (4)$$

Введем многомерное преобразование Лапласа-Стильтеса

$$\hat{\pi}(n^{(r)};\ s^{(r)})=\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\exp\left\{-\sum_{k=1}^{r}s_k\cdot t_k\right\}d_{t^{(r)}}\hat{\Pi}(n^{(r)}; t^{(r)}), \quad (5)$$

$$\pi(N; s^{(r)})=\sum_{|n^{(r)}|=N}\hat{\pi}(n^{(r)};\ s^{(r)}), \quad (6)$$

где $s^{(r)}=(s_1, \ldots, s_r)$; $s_i>0$; $n_i>0$; $t_i>0$ $(i=\overline{1, r})$ и $d_{t^{(r)}}=d_{t_1}d_{t_2}\ldots d_{t_{(r)}}$

Следствие 5. *Если* $B_k(+0)=0$; $n_k>0$; $s_k>0$ $(k=\overline{1, r})$; $N=|n^{(r)}|$, *то*

$$\hat{\pi}(n^{(r)};\ s^{(r)})=\frac{(-1)^{N-1}}{\sigma\cdot N!}\frac{\partial^{N-1}}{\partial\sigma^{N-1}}\left\{\prod_{k=1}^{r}\frac{a_k^{n_k}}{n_k!}[\beta_k(s_k+\sigma)]^{n_k}\right\}.$$

где

$$\beta_k(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dB_k(t)\quad(s>0;\ k=\overline{1, r})$$

Следствие 6. *Если* $B_k(+0)=0$; $s_k>0$ $(k=\overline{1, r})$, $N>0$, *то*

$$\hat{\pi}(N; s^{(r)})=\frac{(-1)^{N-1}}{\sigma\cdot N!}\frac{\partial^{N-1}}{\partial\sigma^{N-1}}\left\{\sum_{k=1}^{r}a_k\beta_k(s_k+\sigma)\right\}^{N},$$

Доказательство следствия 5 аналогично приведенному ниже доказательству следствия 6. С другой стороны, следствие 6 вытекает из следствия 5.

Доказательство следствия 6. На основе (4)—(6) имеем ($k^{(r)} = (k_1, \ldots, k_r)$; $|k^{(r)}| = k_1 + \cdots + k_r$)

$$\sigma\pi(N; s^{(r)}) = \sum_{|n^{(r)}|=N} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \exp\left\{-\sum_{k=1}^{r} (s_k+\sigma)t_k\right\} (|t^{(r)}|)^{N-1} \times$$

$$\times \left\{\prod_{k=1}^{r} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!} d_{t_k}[B_k(t_k)]^{n_k}\right\} =$$

$$= \sum_{|n^{(r)}|=N} \sum_{|k^{(r)}|=N-1} \frac{(N-1)!}{k_1!\, k_2! \cdots k_r!}\left\{\prod_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{k_j} a_j^{n_j}}{n_j!}\frac{\partial^{k_j}}{\partial\sigma^{k_j}}[\beta_j(s_j+\sigma)]^{n_j}\right\} =$$

$$= \sum_{|n^{(r)}|=N} (-1)^{N-1}\frac{\partial^{N-1}}{\partial\sigma^{N-1}}\prod_{k=1}^{r}\left\{\frac{a_k^{n_k}}{n_k!}[\beta_k(s_k+\sigma)]^{n_k}\right\} =$$

$$\frac{(-1)^N}{N!}\frac{\partial^{N-1}}{\partial\sigma^{N-1}}\left\{\sum_{k=1}^{r} a_k\beta_k(s_k+\sigma)\right\}^N.$$

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

Ընդհանուր միալար ամբոխային սպասարկման սիստեմի զբաղվածության պարբերության մասին

Դիտարկվում է պահանջների r անկախ ներմտնող Պուասոնի $L_1, L_2, \ldots, L_r$ հոսքերով և մեկ սպասարկող սարքով մի սիստեմ։ L_i հոսքի պարամետրը հավասար է a_i-ի ($i=\overline{1, r}$), իսկ այդ հոսքի պահանջների (i-պահանջների) սպասարկման ժամանակի բաշխման ֆունկցիան՝ $B_i(t)$-ին, $0 \leqslant B_i(+0) < 1$.

i-պահանջի պատահական սպասարկման ժամանակը β_i-ին ներկայացվում է q_i անկախ պատահական մեծությունների գումարի տեսքով՝

$$\beta_i \overset{d}{=} \beta_i^{(1)} + \cdots + \beta_i^{(q_i)},$$

որ $B_i^{(j)}(t) = P\{\beta_i^{(j)} < t\}$ և հետևաբար $B_i(t) = B_i^{(1)}(t) * \cdots * B_i^{(q_i)}(t)$ * -ն կոմպոզիցիայի նշան է։

Սպասարկման ժամանակները անկախ են և կախված չեն պահանջների առաջացման պրոցեսից։ i-պահանջի սպասարկման ժամանակի $\beta_i^{(j)}$ մասը կոչվում է i-պահանջի j-ֆազա։ Ենթադրենք $t=0$ մոմենտից $x>0$ ժամանակ սարքը փակ է սպասարկման համար և $t=0$ մոմենտին սիստեմում չկա և ոչ մի պահանջ։ Նշանակենք $\pi(x)$-ով x-ից մեծ առաջին մոմենտը, երբ սիստեմն ազատ է պահանջներից։

Դիցուք $S(n^{(r)}; t^{(q^{(r)})})$-ը, որ $n^{(r)}=(n_1, \cdots, n_r)$, $t^{(q^{(r)})}=(t_1^{(q_1)}, \cdots, t_r^{(q_r)})$, $t_i^{(q_i)}=(t_{i1}, t_{i2}, \cdots, t_{iq_i})$ հետևյալ պատահարն է՝ սպասարկվել են n_i հատ i-պահանջ և այդ i-պահանջների j-ֆազաների գումարային երկարությունը $<t_{ij}$ $(i=\overline{1, r};\ j=\overline{1, q_i};\ q_i\geqslant 1)$։

Նշանակենք $\Pi(x;\ n^{(r)},\ t^{(q^{(r)})})$-ով $S(n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})})$ պատահարի տեղի ունենալու հավանականությունը $\pi(x)$ զբաղվածության պարբերության ընթացքում։

Թեորեմ—Երբ $n_k>0$; $t_{kj}>0$; $B_k^{(j)}(+0)=0$ $(k=\overline{1,r};\ j=\overline{1,q_k};\ q_k\geqslant 1)$, $|n^{(r)}|=n_1+\cdots+n_r$, ապա՝

$$d^{+}_{t^{(q^{(r)})}}\Pi(x;\ n^{(r)};\ t^{(q^{(r)})}) = \exp\{-\sigma\cdot t\}\, x\, t^{|n^{(r)}|-1} \prod_{k=1}^{r}{}^{+} \left\{ \frac{a_k^{n_k}}{n_k} \prod_{j=1}^{q_k} d_{t_{kj}} [B_k^{(j)}(t_{kj})]^{n_k} \right\},$$

որտեղ՝

$$t=x+|t_1^{(q_1)}|+\cdots+|t_r^{(q_r)}|;\quad |t_i^{(q_i)}|=t_{i1}+\cdots+t_{iq_i};\quad d^{+}_{t^{(q^{(r)})}}=\prod_{k=1}^{r}{}^{+} d_{t_k^{(q_k)}};$$

$$d_{t_i^{(q_i)}}=\prod_{j=1}^{q_i} d_{t_{ij}}\qquad \sigma=a_1+\cdots+a_r$$

d-ն դիֆերենցիալի նշան է, իսկ $\prod^{+}$ նշանակում է, որ արտադրյալը վերցված է ըստ այն k-երի, որոնց համար n_k-ն մեծ է զրոյից։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Б. Н. Гнеденко* и др., Приоритетные системы обслуживания, МГУ, М., 1973.

2 *У. Н. Прабху*. Методы теории массового обслуживания и управления запасами, М., Мир, 1965.