

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

М. Я. Зингер

Об одной экстремальной оценке для производных

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/III 1977)

Пусть $y = p(x)$ — непрерывная монотонно возрастающая на $[0, \infty)$ четная функция, удовлетворяющая условиям

$$p(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-p(x)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Пусть $x = q(y)$ — обратная к $p(x)$ функция, для которой $\lim_{y \rightarrow \infty} q(y) = +\infty$.

В работе ⁽¹⁾ М. М. Джрбашян доказал следующее утверждение (которое ниже формулируется по работе ⁽²⁾):

если для последовательности алгебраических полиномов $\{P_n(x)\}$

$$|P_n(x)| \leq e^{p(x)}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (2)$$

и

$$\int_0^\infty p(x) x^{-2} dx = +\infty, \quad (3)$$

то в любом конечном отрезке $[-R, R]$ при $n > n_1(R, k)$

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq 2R_k e^{p(x)} \left(\int_1^n \frac{dz}{q(z)} \right)^k, \quad (4)$$

где $R_k = k! \left[\left(1 + \frac{2}{\pi} \right) \frac{e}{k} \right]^k$.

В работе ⁽²⁾ поставлен вопрос: возможно ли в неравенстве (4)

множитель $\left(\int_1^n \frac{dz}{q(z)} \right)^k$ заменить другой, более медленно возрастающей при $n \rightarrow \infty$ функцией?

Пусть Π — множество всех функций $p(x)$, удовлетворяющих условиям (1) и (3). Имеет место следующая

Теорема.* В множестве Π имеются функции $p(x)$ такие, для которых порядковый множитель $\left(\int_0^x \frac{dz}{q(z)}\right)^k$ в неравенстве (4) нельзя заменить другой, медленнее возрастающей функцией. В частности, таковыми являются функции

$$p(x) = |x|^l, \quad 1 < l < +\infty.$$

Доказательство. Отметим прежде всего следующий результат С. Н. Бернштейна⁽²⁾: при изучении экстремальных оценок производных в точках действительной оси достаточно ограничиться рассмотрением полиномов с действительными коэффициентами.

Обозначим через G_n класс алгебраических полиномов с действительными коэффициентами степени не выше n , удовлетворяющих условию (2) с функцией $p(x) = |x|^l$, $1 \leq l < +\infty$.

При каждом фиксированном $l \in [1, +\infty)$ зададим последовательность действительных чисел

$$x_n = \frac{(1-\zeta)^{1/l} \zeta^{(n-1)/l}}{\sqrt[2l]{2\zeta-1}} \left(\frac{t}{n}\right)^{1/l}, \quad n=1, 2, \dots \quad (5)$$

где $\zeta = \zeta(t)$ — решение (по z) трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{\sqrt[2l]{2z-1}} = e^{z/n(1-z)}, \quad \frac{1}{2} < z < 1.$$

Можно показать, что при $n > N(t)$

$$T_n(x_n x) \equiv \cos n \arccos(x_n x) \in G_n.$$

Для этого нужно найти приближенное (и асимптотическое по n) решение следующей задачи**: определить вещественный параметр β_n из условий:

$$1) \quad T_n(\beta_n x) \in G_n.$$

$$2) \quad \text{функции } T_n(\beta_n x) \text{ и } e^{n(x)} \text{ касаются на интервале } (0, +\infty).$$

Выражение (5) является главной частью от β_n (т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/\beta_n) = 1$).

В силу известного свойства полиномов Чебышева, для любого полинома с действительными коэффициентами $Q_n(x)$ степени не выше n из неравенства

$$\max_{\left[-\frac{1}{\alpha_n}, \frac{1}{\alpha_n}\right]} |Q_n(x)| \leq 1 \quad (6)$$

следует включение:

$$Q_n \in G_n. \quad (7)$$

* Утверждение, содержащееся в теореме, подтверждает гипотезу М. М. Джрбашяна⁽²⁾.

** Которая решается обычными приемами приближенного анализа.

Пусть зафиксированы: конечный отрезок $[-R, R]$, значение параметра $t \in (1, \infty)$ и порядок производной k . Рассмотрим задачу: для фиксированной точки $\xi \in [-R, R]$ определить

$$\max_{\{Q_n\}} |Q_n^{(k)}(\xi)|,$$

где $n > \max\{N(t), k\}$ и $Q_n(x)$ — произвольный полином из множества, определенного условием (6).

Для решения этой задачи воспользуемся асимптотическим равенством С. Н. Бернштейна ⁽⁴⁾ для максимума модуля k -той производной:

$$\max_{\{Q_n\}} |Q_n^{(k)}(\xi)| \sim \Omega_t^k n^{(1-1/t)k},$$

где константа

$$\Omega_t = \frac{(1-\zeta)^{1/t} \zeta^{(t-1)/t} t^{1/t}}{\sqrt{2\zeta-1}}.$$

Из включения (7) ясно, что найденный

$$\max_{\{Q_n\}} |Q_n^{(k)}(\xi)| \leq \max_{P_n \in G_n} |P_n^{(k)}(\xi)|.$$

С другой стороны, для $p(x) = |x|^t$ имеем

$$q(z) = z^{1/t}, \left(\int_1^n \frac{dz}{q(z)} \right)^k \sim \left(\frac{t}{t-1} \right)^k n^{(1-1/t)k},$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Сделаем два замечания относительно использования асимптотического равенства С. Н. Бернштейна.

Замечание 1. Применение равенства С. Н. Бернштейна в данном случае не совсем тривиально (рассматриваются отрезки растущей длины $\left[-\frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_n}\right]$). Вывод аналога равенства С. Н. Бернштейна для отрезков растущей длины можно провести приемом, изложенным в ⁽³⁾, стр. 135—138, с дополнительным учетом того факта, что $1/a_n$ при $t > 1$ и при $n \rightarrow \infty$ растет медленнее чем n .

Замечание 2. Использование аналога асимптотического равенства С. Н. Бернштейна связано не только с технической стороной доказательства. Задачу, изученную С. Н. Бернштейном, можно рассматривать как предельный случай задачи, изученной М. М. Джрбашьяном. Действительно, пусть $p(x) = |x|^t$, и пусть $t \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{|x|^t} = E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1 \\ e, & \text{если } |x| = 1 \\ \infty, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ приходим к задаче С. Н. Бернштейна об оценке максимума модуля k -той производной полиномов, не превосходящих по модулю единицы на конечном сегменте.

Вычислительный центр
Дальневосточного научного центра
Академии наук СССР

Մ. Յա. ԶԻՆԳԵՐ

Ածանցյալների համար մի էֆստրեմալ գնահատականի մասին

Դիցուք $y = p(x)$ անընդհատ, $[0, \infty)$ -ում մոնոտոն աճող զույգ ֆունկցիա է, որը բավարարում է

$$p(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-p(x)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

պայմաններին: Նշանակենք $x = q(y)$ -ով $p(x)$ ֆունկցիային հակադարձ ֆունկցիան, որի համար $\lim_{y \rightarrow \infty} q(y) = +\infty$, իսկ $P_n(x)$ -ով n աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամը:

Մ. Մ. Զորաշլանի կողմից ապացուցված է հետևյալ պնդումը՝

եթե $|P_n(x)| \leq e^{p(x)}$, $-\infty < x < +\infty$, և $\int_0^\infty p(x)x^{-2}dx = +\infty$, ապա ցանկացած վերջավոր $[-R, R]$ հատվածում տեղի ունի

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq 2R_k e^{p(x)} \left(\int_1^n \frac{dz}{q(z)} \right)^k$$

գնահատականը $n > n_1(R, k)$ համար, որտեղ $R_k = k! \left| \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) \frac{e}{k} \right|^k$,

ներկա հոդվածում հաստատվում է Մ. Մ. Զորաշլանի հիպոթեզը այն մասին,

որ $\left(\int_1^n \frac{dz}{q(z)} \right)^k$ արտադրիչը անհնար է փոխարինել ուրիշ $n \rightarrow \infty$ դեպքում

ավելի դանդաղ աճող ֆունկցիայով (թուլատրելի $p(x)$ -երի ամբողջ բազմություն համար):

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐՈՇԻՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 84, № 1, 5—8, 1952. ² М. М. Джрбашян, Математический сборник, т. 36(78), № 3, 353—440 (1955). ³ С. Н. Бернштейн, Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris, 1926. ⁴ С. Н. Бернштейн, Несколько замечаний к неравенству Владимира Маркова (1913), Собр. соч., т. 1, М., Изд. АН СССР, 151—156, 1952. ⁵ М. Я. Зингер, Элементы дифференциальной теории чебышевских приближений, 3—171, «Наука», М., 1975.