ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXV 1977 5

УДК 539.37

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоян

Плоская контактная задача для двух усеченных клиньев

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 30/III 1977)

Исследованию напряженного состояния клиновидных областей посвящены работы ([1–5]) и др.). В большинстве из них, в основном, определяется порядок особенностей напряжений в одной угловой точке.

В данной работе приводится решение для первой основной плоской задачи теории упругости для составной X-образной области, образованной соединением двух усеченных клиньев из различных материалов (рис. 1) с двумя угловыми точками O_1 и O_2, в которых определяются особенности напряжений.

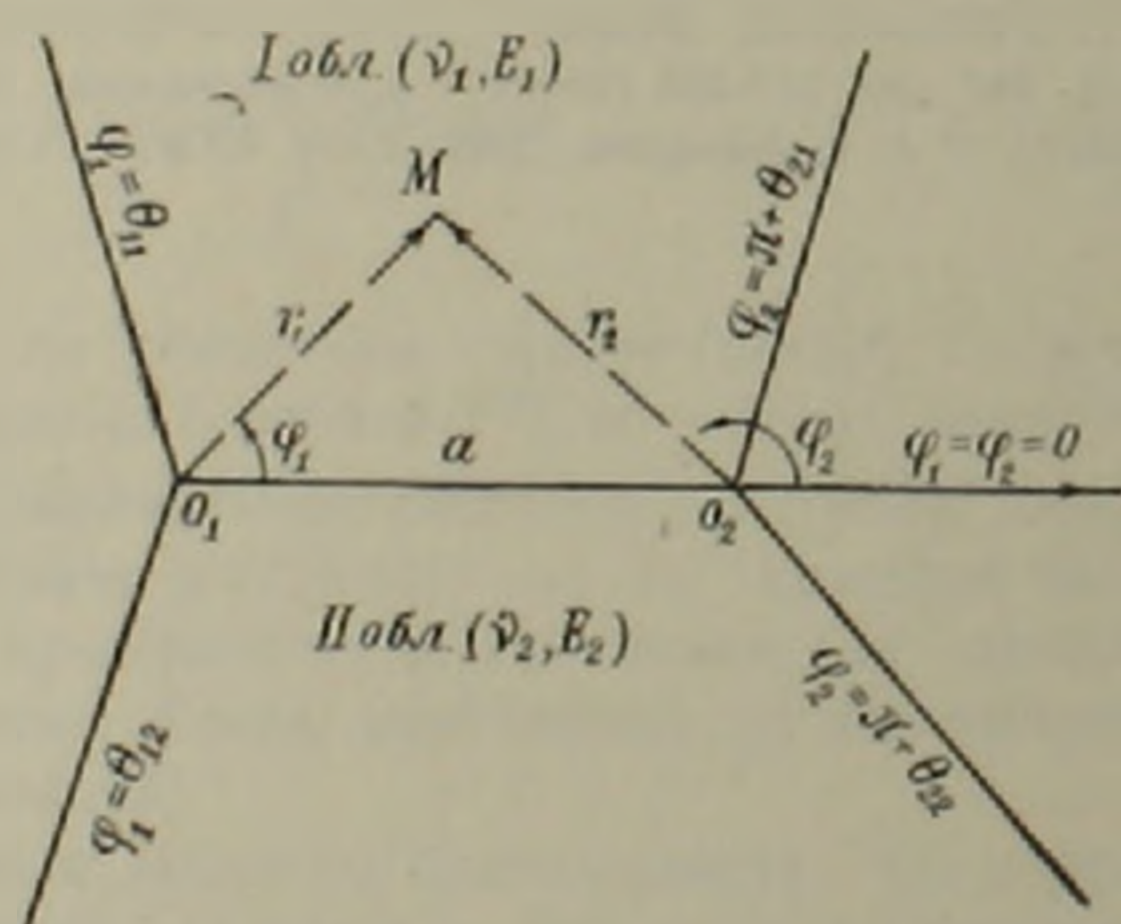

Рис. 1

Пусть E_1, ν_1 будут упругими постоянными материала в верхней части рассматриваемой области, а E_2, ν_2—в нижней части. На линии контакта двух материалов O_1O_2 между материалами существует полное сцепление. Внешняя нагрузка задается на кромках клиньев напряжениями.

При решении задачи будем пользоваться полярной системой координат. В этой системе бигармоническую функцию Эйри можно представить в виде интеграла Меллина.

$$F(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\Phi(s, \varphi)r^{1-s}ds, \quad \Phi(s, \varphi)=\int_{0}^{\infty}F(r, \varphi)r^{s-2}dr, \tag{1}$$

где L-прямая, параллельная мнимой оси $s=c+iy$, $\varepsilon-1<c<0$, $\varepsilon<1$. При этом функция $\Phi(s, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi^{\mathrm{IV}}+2(s^2+1)\Phi''+(s^2-1)^2\Phi=0. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение две системы полярных координат $r_1\varphi_1$ и $r_2\varphi_2$ с центрами соответственно в точках O_1 и O_2. Решение поставленной задачи ищем в виде суммы двух „местных решений“, т. е. в виде

$$F=\sum_{n=1}^{2}F_n(r_n, \varphi_n)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{2}\int_{L_n}\Phi_n(s, \overline{\varphi}_n)r_n^{1-s}ds, \tag{3}$$

$$\overline{\varphi}_1=\varphi_1, \quad \overline{\varphi}_2=\varphi_2-\pi.$$

При этом напряжения $\sigma_r^{(n)}$, $\sigma_\varphi^{(n)}$, $\tau_{r\varphi}^{(n)}$ и деформации $e_{rr}^{(n)}$, $e_{\varphi\varphi}^{(n)}$, $e_{r\varphi}^{(n)}$ отнесенные к полярной системе r_n, φ_n выражаются через функцию F формулами.

$$\begin{aligned}
&\sigma_r^{(n)}(r_n, \overline{\varphi}_n)=\frac{1}{r_n}\frac{\partial F}{\partial r_n}+\frac{1}{r_n^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi_n^2},\\
&\sigma_\varphi^{(n)}(r_n, \overline{\varphi}_n)=\frac{\partial^2 F}{\partial r_n^2},\\
&\tau_{r\varphi}^{(n)}(r_n, \overline{\varphi}_n)=-\frac{\partial}{\partial r_n}\left(\frac{1}{r_n}\frac{\partial F}{\partial \varphi_n}\right),
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&e_{rr}^{(n)}=\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r_n}=\frac{1}{E_n}\left(\sigma_r^{(n)}-\nu_n\sigma_\varphi^{(n)}\right),\\
&e_{\varphi\varphi}^{(n)}=\frac{\partial v_\varphi^{(n)}}{r_n\partial\varphi_n}-\frac{u_r^{(n)}}{r_n}=\frac{1}{E_n}\left(\sigma_\varphi^{(n)}-\nu_n\sigma_r^{(n)}\right),\\
&e_{r\varphi}^{(n)}=\frac{\partial v_\varphi^{(n)}}{\partial r_n}-\frac{v_\varphi^{(n)}}{r_n}+\frac{1}{r_n}\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial\varphi_n}=\frac{2(1+\nu_n)}{E_n}\tau_{r\varphi}^{(n)}(r_n, \overline{\varphi}_n).
\end{aligned} \tag{5}$$

Функции $\Phi_n(s, \overline{\varphi}_n)$ ищем в виде

$$\Phi_n(s, \overline{\varphi}_n)=\begin{cases}\Phi_{n1}(s, \overline{\varphi}_n) & \text{в обл. I}\\ \Phi_{n2}(s, \overline{\varphi}_n) & \text{в обл. II}\end{cases} \tag{6}$$

Функции $F_n(r_n, \varphi_n)$ удовлетворяют уравнению $\Delta^2F=0$, следовательно, функции $\Phi_{nk}(s, \overline{\varphi}_n)$ должны удовлетворять уравнению (2). поэтому они имеют вид:

$$\Phi_{nk}(s, \varphi_n) = A_{nk}\cos(s-1)\varphi_n + B_{nk}\sin(s-1)\varphi_n + C_{nk}\cos(s+1)\varphi_n +$$
$$+ D_{nk}\sin(s+1)\varphi_n. \tag{7}$$

Здесь при $k=1$ углы φ_n изменяются в пределах $0<\varphi_1\leqslant\theta_{11}$, $\theta_{21}\leqslant\varphi_2-\pi<0$, а при $k=2$ пределы будут $\theta_{12}\leqslant\varphi_1<0$, $0<\varphi_2-\pi\leqslant\theta_{22}$, причем имеют место следующие неравенства:

$$\theta_{11}-\theta_{21}>\pi,\ \theta_{22}-\theta_{12}>\pi,\ \theta_{22}-\theta_{21}\leqslant 2\pi,\ \theta_{11}-\theta_{12}\leqslant 2\pi. \tag{8}$$

Требуем, чтобы каждая из функций $F_n(r_n, \varphi_n)$ удовлетворяла на линии контакта O_1O_2 условиям полного сцепления двух материалов (приравниваются на контакте соответствующие величины напряжений $\sigma_\varphi^{(n)}$, $\tau_{r\varphi}^{(n)}$ и перемещения $u_r^{(n)}$, $u_\varphi^{(n)}$, $n=1, 2$).

Выполнение этого требования приводит нас к следующим соотношениям между неизвестными функциями $A_{nk}(s), \ldots, D_{nk}(s)$

$$A_{n1}+C_{n1}=A_{n2}+C_{n2}=(s-1)^{-1}(\delta_2C_{n2}-\delta_1C_{n1}),$$
$$(s-1)B_{n1}+(s+1)D_{n1}=(s-1)B_{n2}+(s+1)D_{n2}=\delta_1D_{n1}-\delta_2D_{n2}, \tag{9}$$

где введены обозначения

$$\delta_n=\frac{4}{\delta E_n},\qquad \delta=\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2},\quad (n=1,\ 2)$$

Введем новые неизвестные функции $X_{nk}(s)$, $Y_{nk}(s)$

$$s(s-1)\Phi_{nk}(s, \theta_{nk})=a^sX_{nk}(s),\quad s\Phi'_{nk}(s, \theta_{nk})=a^sY_{nk}(s)\quad (n, k=1, 2) \tag{10}$$

Решая совместно системы (9) и (10) выражаем старые неизвестные через новые

$$\xi\Delta_p(\xi)C_{pk}(\xi)=a^\xi(X_{pk}M_{pk}^-+Y_{pk}N_{pk}^--X_{pm}Q_{pm}^-+Y_{pm}P_{pm}^-),$$
$$\xi\Delta_p(\xi)D_{pk}(\xi)=a^\xi(X_{pk}N_{pk}^+-Y_{pk}M_{pk}^++X_{pm}P_{pm}^++Y_{pm}Q_{pm}^+),$$
$$\xi(\xi-1)\Delta_p(\xi)(A_{pk}+C_{pk})=a^\xi\sum_{k=1}^{2}(-1)^k(X_{pk}a_{pk}^-+Y_{pk}b_{pk}^-),$$
$$\xi\Delta_p(\xi)[(\xi-1)B_{pk}+(\xi+1)D_{pk}]=a^\xi\sum_{k=1}^{2}(-1)^m(X_{pk}b_{pk}^+-Y_{pk}a_{pk}^+), \tag{11}$$
$$(p, k=1,\ 2\quad k+m=3)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$a_{pk}^\pm(\xi)=\delta_kM_{pk}^\pm+\delta_mQ_{pk}^\mp=4\delta_k\Delta_{pm}\bar{\alpha}_{pk}^\mp+(-1)^m\delta_1\delta_2(s_{pm}^\pm\beta_{pk}^\mp-c_{pm}^\pm\alpha_{pk}^\mp),$$
$$b_{pk}^\pm(\xi)=\delta_kN_{pk}^\pm-\delta_mP_{pk}^\mp=-4\delta_k\Delta_{pm}\bar{\beta}_{pk}^\pm+(-1)^m\delta_1\delta_2(s_{pm}^\pm\alpha_{pk}^\mp+c_{pm}^\pm\beta_{pk}^\pm),$$
$$M_{pk}^\pm(\xi)=\delta_1\delta_2\gamma_{pk}^\pm+d_{pm}\alpha_{pk}^\pm+(-1)^k\delta_k(d_{pm}-\delta_m^2)\cos(\xi-1)\theta_{pk}, \tag{12}$$
$$N_{pk}^\pm(\xi)=\delta_1\delta_2\delta_{pk}^\pm-d_{pm}\beta_{pk}^\pm-(-1)^k\delta_k(d_{pm}-\delta_m^2)\sin(\xi-1)\theta_{pk},$$
$$P_{pk}^\pm(\xi)=(-1)^k\delta_k[(-1)^m\delta_m\beta_{pk}^\pm-\bar{\beta}_{pk}^\pm c_{pm}^\pm+s_{pm}^\pm\bar{\alpha}_{pk}^\pm],$$

$$Q^{\pm}_{pk}(\xi) = (-1)^k \delta_k [(-1)^m \delta_m \alpha^{\pm}_{pk} - \bar{\alpha}^{\pm}_{pk} c^{\mp}_{pm} - \bar{s}^{\pm}_{pm} \beta^{\pm}_{pk}],$$

где

$$\alpha^{\pm}_{pk}(\xi, \theta_{pk}) = \bar{\alpha}^{\pm}_{pk}(\xi, \theta_{pk}) - (-1)^k \delta_k \cos(\xi-1)\theta_{pk} = 2(1 \mp \xi)\sin\xi\theta_{pk}\sin\theta_{pk},$$

$$\beta^{\pm}_{pk}(\xi, \theta_{pk}) = \bar{\beta}^{\pm}_{pk}(\xi, \theta_{pk}) - (-1)^k \delta_k \sin(\xi-1)\theta_{pk} = (1 \pm \xi)\sin(\xi+1)\theta_{pk} +$$
$$+ (1 \mp \xi)\sin(\xi-1)\theta_{pk}$$

$$\gamma^{\pm}_{pk}(\xi,\theta_{pk}) = (1 \pm \xi)\cos(\xi-1)\theta_{pk} - \cos[\xi(2\theta_{pm}+\theta_{pk}) - \theta_{pk}] \mp \xi\cos[\xi\theta_{pk} + 2\theta_{pm} - \theta_{pk}] \tag{13}$$

$$\delta^{\pm}_{pk}(\xi, \theta_{pk}) = \sin[\xi(2\theta_{pm}+\theta_{pk}) - \theta_{pk}] \pm \xi\sin[\xi\theta_{pk} + 2\theta_{pm} - \theta_{pk}] - (1 \pm \xi)\sin(\xi-1)\theta_{pk},$$

$$d_{pk}(\xi, \theta_{pk}) = \delta^2_k + 4(-1)^k \delta_k \cdot \sin^2\xi\theta_{pk} + 4\Delta_{pk},$$

$$\Delta_{pk}(\xi, \theta_{pk}) = \sin^2\xi\theta_{pk} - \xi^2\sin^2\theta_{pk},$$

$$c^{\pm}_{pk}(\xi, \theta_{pk}) = -2(\sin^2\xi\theta_{pk} \pm \xi\sin^2\theta_{pk}),$$

$$s^{\pm}_{pk}(\xi, \theta_{pk}) = \sin 2\xi\theta_{pk} \pm \xi\sin 2\theta_{pk},$$

$$\Delta_p(\xi) = 4(\delta^2_1\Delta_{p2} + \delta^2_2\Delta_{p1}) + 16(\Delta_{p1} - \delta_1\sin^2\xi\theta_{p1})(\Delta_{p2} + \delta_2\sin^2\xi\theta_{p2}) -$$
$$- 8\delta_1\delta_2[\sin\xi\theta_{p1}\cdot\sin\xi\theta_{p2}\cdot\cos\xi(\theta_{p1}+\theta_{p2}) - \xi^2\sin\theta_{p1}\sin\theta_{p2}\cos(\theta_{p1}-\theta_{p2})].$$

Предположим, что внешняя нагрузка на кромках клиньев задана соотношениями

$$\sigma^{(n)}_{\varphi}(r_n, \theta_{nk}) = f_{nk}(r_n), \quad \tau^{(n)}_{r\varphi}(r_n, \theta_{nk}) = g_{nk}(r_n) \quad (k, n = 1, 2). \tag{14}$$

Тогда удовлетворяя граничным условиям (14) используя при этом формулы (1), (10), (11) для определения неизвестных функций X_{nk} и Y_{nk} получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$X_{nk}(s) + \int_{L_p} [X_{pk}(\xi)K^{(1)}_{pk} + Y_{pk}(\xi)K^{(2)}_{pk} + X_{pm}(\xi)K^{(3)}_{pk} + Y_{pm}(\xi)K^{(4)}_{pk}]d\xi = \bar{f}_{nk}(s), \tag{15}$$

$$Y_{nk}(s) + \int_{L_p} [X_{pk}(\xi)K^{(5)}_{pk} + Y_{pk}(\xi)K^{(6)}_{pk} + X_{pm}(\xi)K^{(7)}_{pk} + Y_{pm}(\xi)K^{(8)}_{pk}]d\xi = \bar{g}_{nk}(s)$$

$$(n,\ k = 1,\ 2) \quad (n+p = k+m = 3)$$

Здесь ядра интегральных уравнений имеют вид

$$K^{(q)}_{pk}(\xi, s) = \frac{B(s+1,\ \xi-s)}{2\pi i\Delta_p(\xi)} k^{(q)}_{pk}(\xi, s), \quad (q = 1, 2, \ldots, 8) \tag{16}$$

где $B(x, y)$ — эйлеров интеграл первого рода, а функции $k^{(q)}_{pk}(\xi, s)$ определяются формулами

$$
\begin{aligned}
k^{(1)}_{pk} &= \alpha^{+}_{nk} M^{-}_{pk} + (-1)^{n-k} \beta^{-}_{nk} N^{-}_{pk} - (-1)^{m} a^{-}_{pk} \cos(s-1)\beta_{nk} + \\
&\quad + (-1)^{n} b^{+}_{pk} \sin(s-1)\beta_{nk}, \\
k^{(2)}_{pk} &= \alpha^{+}_{nk} N^{-}_{pk} - (-1)^{n-k} \beta^{-}_{nk} M^{+}_{pk} - (-1)^{m} b^{-}_{pk} \cos(s-1)\beta_{nk} - \\
&\quad - (-1)^{n} a^{+}_{pk} \sin(s-1)\beta_{nk}, \\
k^{(3)}_{pk} &= -\alpha_{nk} Q^{-}_{pm} + (-1)^{n-k} \beta^{-}_{nk} P^{+}_{pm} + (-1)^{m} a^{-}_{pm} \cos(s-1)\beta_{nk} - \\
&\quad - (-1)^{n} b^{+}_{pm} \sin(s-1)\beta_{nk}, \\
k^{(4)}_{pk} &= \alpha^{+}_{nk} P^{-}_{pm} + (-1)^{n-k} \beta^{-}_{nk} Q^{+}_{pm} + (-1)^{m} b^{-}_{pm} \cos(s-1)\beta_{nk} + \\
&\quad + (-1)^{n} a^{+}_{pm} \sin(s-1)\beta_{nk}, \\
k^{(5)}_{pk} &= (-1)^{n-k} \beta^{+}_{nk} M_{pk} - \alpha_{nk} N^{+}_{pk} + (-1)^{n} a^{-}_{pk} \sin(s-1)\beta_{nk} + \\
&\quad + (-1)^{m} b_{pk} \cos(s-1)\beta_{nk}, \\
k^{(6)}_{pk} &= (-1)^{n-k} \beta^{+}_{nk} N^{-}_{pk} + \alpha^{-}_{nk} M^{+}_{pk} + (-1)^{n} b^{-}_{pk} \sin(s-1)\beta_{nk} - \\
&\quad - (-1)^{m} a^{+}_{pk} \cos(s-1)\beta_{nk}, \\
k^{(7)}_{pk} &= -(-1)^{n-k} \beta^{+}_{nk} Q^{-}_{pm} - \alpha^{-}_{nk} P^{+}_{pm} - (-1)^{n} a^{-}_{pm} \sin(s-1)\beta_{nk} - \\
&\quad - (-1)^{m} b^{+}_{pm} \cos(s-1)\beta_{nk}, \\
k^{(8)}_{pk} &= (-1)^{n-k} \beta^{+}_{nk} P^{-}_{pm} - \alpha^{-}_{nk} Q^{+}_{pm} - (-1)^{n} b^{-}_{pm} \sin(s-1)\beta_{nk} + \\
&\quad + (-1)^{m} a^{+}_{pm} \cos(s-1)\beta_{nk}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Свободные члены системы (15) выражаются через внешние нагрузки следующим образом:

$$
\bar{f}_{nk}(s) = a^{-s} \int_{0}^{a} f_{nk}(r_n) r_n^{s} dr_n, \quad \bar{g}_{nk}(s) = a^{-s} \int_{0}^{a} g_{nk}(r_n) r_n^{s} dr_n. \tag{18}
$$

В формулах (17) $\beta_{nk} = \pi - |\theta_{nk}|$, функции $\alpha^{\pm}_{nk}$ и $\beta^{\pm}_{nk}$ зависят от аргументов (s, β_{nk}), а функции $M^{\pm}_{pk}$, $N^{\pm}_{pk}$, $P^{\pm}_{pk}$, $Q^{\pm}_{pk}$, $a^{\pm}_{pk}$ и $b^{\pm}_{pk}$ зависят от аргумента ξ.

После решения уравнений (15) контактные напряжения на отрезке O_1O_2 $(\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = 0,\ r_1 + r_2 = a)$ в силу (4) — (6) будут определяться по формулам:

$$
\sigma_{\varphi} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p,k=1}^{2} \frac{(-1)^{k}}{r_p} \int_{L_p} \left[X_{pk}(\xi) a^{-}_{pk}(\xi) + Y_{pk}(\xi) b^{-}_{pk}(\xi) \right] \left(\frac{a}{r_p} \right)^{\xi} \frac{d\xi}{\Delta_p(\xi)},
$$

$$
\tau_{r\varphi} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p,k=1}^{2} \frac{(-1)^{k}}{r_p} \int_{L_p} \left[Y_{pk}(\xi) a^{-}_{pk}(\xi) - X_{pk}(\xi) b^{+}_{pk}(\xi) \right] \left(\frac{a}{r_p} \right)^{\xi} \frac{d\xi}{\Delta_p(\xi)}, \tag{19}
$$

$$\sigma_r^{(k)} = -\sigma_\varphi - \frac{2}{\pi i} \sum_{p=1}^{2} \int_{L_p} \xi C_{pk}(\xi) r_p^{-\xi-1} d\xi.$$

Здесь верхний индекс показывает, что σ_r вычисляется или в верхнем материале ($k=1$), или же в нижнем ($k=2$).

Из (19) и (11) нетрудно получить формулу для вычисления скачка нормального напряжения σ_r на линии контакта.

$$\delta_1 \sigma_r^{(1)} - \delta_2 \sigma_r^{(2)} = (4 - \delta_1 + \delta_2)\sigma_\varphi. \tag{20}$$

Из приведенных формул следует, что несмотря на то, что в рассматриваемой задаче входят четыре упругие постоянные E_1, E_2, ν_1, ν_2, перемещения (с точностью до постоянного множителя) и напряжения зависят только от двух приведенных упругих постоянных δ_1 и δ_2 ([4]).

Интегралы, входящие в (19), легко вычисляются. Например, если на границе тела вдали от вершин O_1 и O_2 действуют сосредоточенные силы или моменты, то, как следует из (15) и (19) контактные напряжения будут выражаться в виде суммы двух степенных рядов:

$$a\sigma_\varphi = \sum_q \sum_{p,k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{\Delta_p'(\xi_{pq})} \left[X_{pk}(\xi_{pq}) a_{pk}^-(\xi_{pq}) + Y_{pk}(\xi_{pq}) b_{pk}^-(\xi_{pq}) \right] \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{np} r_p^n, \tag{21}$$

$$a\tau_{r\varphi} = \sum_q \sum_{p,k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{\Delta_p'(\xi_{pq})} \left[Y_{pk}(\xi_{pq}) a_{pk}^+(\xi_{pq}) - X_{pk}(\xi_{pq}) b_{pk}^+(\xi_{pq}) \right] \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda'_{np} r_p^n,$$

где суммирование по q производится по всем ξ_{pq}-корням целых функций $\Delta_p(\xi)$, для которых $\mathrm{Re}\,\xi_{pq} < 0$.

Исключением неизвестных X_{pk}, X_{pm}, Y_{pk}, Y_{pm} система (15) сводится к двум независимым системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно неизвестных функций X_{nk}, X_{nm}, Y_{nk}, Y_{nm}

$$X_{nk}(s)(1+\gamma_{nk}^{(1)}) + Y_{nk}\gamma_{nk}^{(2)} + X_{nm}\gamma_{nk}^{(3)} + Y_{nm}\gamma_{nk}^{(4)} + \int_{L_n} [X_{nk}(z)\bar{K}_{nk}^{(1)}(z,s) + Y_{nk}\bar{K}_{nk}^{(2)} +$$

$$+ X_{nm}\bar{K}_{nk}^{(3)} + Y_{nm}\bar{K}_{nk}^{(4)}]dz = \bar{f}_{nk}(s) - \int_{L_p} [\bar{f}_{pk}(z) K_{pk}^{(1)}(z,s) + \bar{g}_{pk} K_{pk}^{(2)} +$$

$$+ \bar{f}_{pm} K_{pk}^{(3)} + \bar{g}_{pm} K_{pk}^{(4)}]dz, \tag{22}$$

$$X_{nk}(s)\gamma^{(5)}_{nk}+Y_{nk}(1+\gamma^{(6)}_{nk})+X_{nm}\gamma^{(7)}_{nk}+Y_{nm}\gamma^{(8)}_{nk}+\int\limits_{L_n}[X_{nk}(z)\bar{K}^{(5)}_{nk}(z,s)+Y_{nk}\bar{K}^{(6)}_{nk}+$$

$$+X_{nm}\bar{K}^{(7)}_{nk}+Y_{nm}\bar{K}^{(8)}_{nk}]dz=\bar{g}_{nk}(s)-\int\limits_{L_n}[\bar{f}_{pk}(z)K^{(5)}_{pk}(z,s)+\bar{g}_{pk}K^{(6)}_{pk}+$$

$$+\bar{f}_{pm}K^{(7)}_{pk}+\bar{g}_{pm}K^{(8)}_{pk}]dz,$$

$$(n,\ k=1;\ 2,\quad n+p=k+m=3)$$

где введены следующие обозначения

$$\bar{K}^{(q)}_{nk}(z,s)=\frac{\Gamma(s+1)}{4\pi\Gamma(z+1)}\int\limits_{L_p}\frac{\Gamma(z-\xi)\,\Gamma(\xi-s)}{\Delta_n(z)\,\Delta_p(\xi)}\,\bar{k}^{(q)}_{nk}(z,\xi,s)d\xi,$$

$$4\Delta_1(s)\Delta_2(s)\gamma^{(q)}_{nk}(s)=-\bar{k}^{(q)}_{nk}(s,\ s,\ s)\quad(q=1,\ 2,\ \ldots,\ 8)$$

$$\begin{aligned}\bar{k}^{(q)}_{nk}(z,\ \xi,\ s)&=k^{(q)}_{nk}(z,\ \xi)\cdot k^{(1)}_{pk}(\xi,\ s)+k^{(q+1)}_{nk}(z,\xi)\,k^{(2)}_{pk}(\xi,\ s)+\\&+k^{(l+4)}_{nm}(z,\ \xi)\,k^{(4)}_{nk}(\xi,\ s)+k^{(l)}_{nm}(z,\ \xi)\,k^{(3)}_{pk}(\xi,\ s)\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}\bar{k}^{(q+4)}_{nk}(z,\ \xi,\ s)&=k^{(q)}_{nk}(z,\xi)\,k^{(5)}_{pk}(\xi,\ s)+k^{(q+1)}_{nk}(z,\ \xi)\,k^{(6)}_{pk}(\xi,\ s)+\\&+k^{(l)}_{nm}(z,\ \xi)\,k^{(7)}_{pk}(\xi,\ s)+k^{(l+4)}_{nm}(z,\ \xi)\,k^{(8)}_{pk}(\xi,\ s)\end{aligned}$$

$$l=l(q),\quad l(1)=3,\quad l(2)=4,\quad l(3)=1,\quad l(4)=2.$$

Нетрудно показать, что при соблюдении первых двух условий (8) уравнения (22) регулярны, свободные члены ограничены по модулю.

В случае вертикальной геометрической симметрии ($\theta_{1k}=-\theta_{2k}$) система (15) распадается на две независимые системы относительно неизвестных $X_{1k}\pm X_{2k}$, $Y_{1k}\mp Y_{2k}$. При этом если $f_{1k}=f_{2k}$, $g_{1k}=-g_{2k}$, то $X_{1k}=X_{2k}$, $Y_{1k}=-Y_{2k}$. Если же $f_{1k}=-f_{2k}$, $g_{1k}=g_{2k}$, то $X_{1k}=-X_{2k}$, $Y_{1k}=Y_{2k}$. В обоих случаях в системе (15) остаются только четыре уравнения.

Случай одинаковых материалов получается из общих формул путем предельного перехода, когда $\delta_1=\delta_2\to\infty$. При этом выражения (16) и (17) сильно упрощаются ([15]).

При $\delta_1=4(1+\nu_1)^{-1}$, $\delta_2=0$, ($E_2=\infty$) получается случай одного материала, когда на отрезке O_1O_2 заданы нулевые перемещения. При этом $Q^{\pm}_{p2}=P^{\pm}_{p2}=a^{\pm}_{p2}=b^{\pm}_{p2}=0$, поэтому задача сводится к решению четырех сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных X_{n1} и Y_{n1} ($n=1$, 2). Для этого случая суммирование по индексу q в формулах (21) производится по корням соответствующего трансцендентного уравнения $d_{p1}(\xi,\ \theta_{p1})=0$ ($\mathrm{Re}\,\xi<0$).

В некоторых частных случаях систему (15) можно решать точно при помощи интегральных преобразований Фурье ([16–17]).

Отметим, что систему (15) можно привести к решению бесконечных систем алгебраических уравнений путем представления неизвестных функций в виде рядов Дирихле ([18]) или суммы простых дробей.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ԲԱԲԼՈՅԱՆ

Երկու հատած սեպերի հարթ կոնտակտային խնդիր

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ կոնտակտային խնդիրը երկու տարբեր նյութերից բաղկացած հատած սեպերի համար, երբ սեպերի կոնտակտից դուրս եզրերում տրված են լարումները։ Ենթադրվում է, որ կոնտակտի գծի երկարությամբ մարմինները լրիվ հարակցված են։

Խնդրի լուծումը ներկայացված է որպես երկու տեղական լուծումների գումար, որոնցից յուրաքանչյուրը փնտրվում է Մելլինի ինտեգրալների տեսքով։

Բավարարելով եզրային և կոնտակտի պայմաններին, անհայտ ֆունկցիաների համար ստացվել են սկզբում սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմ, որը հետագայում բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ռեգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի։

Կոնտակտային լարումների համար ստացվել են անջատված եզակիություններով բանաձևեր։ Դիտարկված են մի քանի մասնավոր դեպքեր։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Я. С. Уфлянд,* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд «Наука», Л., 1968. [2] *О. К. Аксентян,* ПММ, т. 31, вып. 1, 1967. [3] *И. И. Ворович.* III Всесоюзный съезд по теории и прикладной механике, Аннотации докладов, М., 1966 [4] *Дж. Дандерс,* Прикладная механика, Тр. ASME, т. 36, серия Е, № 3, Обсуждение работы Болжи, 1969 [5] *J. Dunders,* J. of compos. mat. vol. 1, 1967 [6] *Д. Б. Боджи,* Прикладная механика, Тр. ASME т. 38, сер. Е, №2, 1971. [7] *A. K. Rao.* ZAMM, Bd 51, №5, 1971. [8] *К. С. Чобанян, Р. К. Алексанян,* „Известия АН АРМ. ССР", Механика, т. XXIV, №3 (1971). [9] *Р. К. Алексанян,* „Известия АН АРМ. ССР" Механика, т. XXIV, №4 (1971). [10] *V. L. Hein, F. Erdogan* Int. J. Fract. Mech. v. 7 №3 (1971). [11] *Д. Б. Боджи,* Прикладная механика, Тр. ASME т. 38, сер. Е, №4 1971. [12] *M. L. Williams,* J. of Appl. Mech., vol. 19, №4 (1952). [13] *R. A. Westmann,* Int. J. Engng Sci., vol. 13, №4 (1975) [14] *P. S. Theocaris,* ZAMM, Bd. 26, №1, 1975 [15] *А. А. Баблоян, Н. О. Гулканян,* ДАН, т. LXII, №3, (1976). [16] *Н. И. Мусхелишвили,* Сингулярные интегральные уравнения, „Наука", М., 1968. [17] *Н. П. Векуа,* Система сингулярных интегральных уравнений, „Наука" М., 1970 [18] *А. Ф. Леонтьев.* Ряды экспонент, „Наука", М., 1976.