ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXV 1977 5

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

К. С. Казарян

О базисах и безусловных базисах в весовых пространствах L^p, $1 \leqslant p < \infty$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 21/X 1977)

В настоящей работе исследуется вопрос об описании положительных, абсолютно непрерывных мер μ, для которых в пространствах $L^p(d\mu)$ классические ортонормированные системы или их подсистемы являются базисами, безусловными базисами.

В этом направлении некоторые результаты были получены ранее ([1,2]). Как легко видеть, вопрос о получении базиса в пространстве L^p умножением системы функций $|\varphi_n|$ на функцию $M(x)$ после обозначения $|M|^p = \psi$ сводится к вопросу о базисности системы $|\varphi_n|$ в пространстве $L^p|\psi dx|$. Прежде чем изложить результаты настоящей работы приведем одну интересную теорему Р. Ханта, Б. Макенхаупта и Р. Уидена (см. [3], стр. 245), которую можно сформулировать в следующей форме.

Теорема (*HMW*). *Для того, чтобы тригонометрическая система была базисом в пространстве* $L^p|\psi dx|$, $1 < p < \infty$, *где* $\psi(x)$ — *положительная функция определенная на сегменте* $[0, 2\pi]$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала абсолютная константа* $k_p > 0$ *такая, что для любого интервала* I, $I \subset [0, 2\pi]$ *имеет место следующее неравенство*

$$(A_p) \quad \left[\frac{1}{|I|}\int_I \psi(x)\right]\left[\frac{1}{|I|}\int_I |\psi(x)|^{-\frac{1}{p-1}} dx\right]^{p-1} \leqslant k_p,$$

где через $|I|$ *обозначена длина интервала* I.

Аналогичный результат имеет место для систем Уолша и Хаар при более слабых условиях на весовую функцию, более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $|\gamma_n(x)|_{n=1}^{\infty}$ — *система Хаара, и функция* $\psi(x)$ *положительна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) существует абсолютная константа $B_p > 0$ такая, что для любого интервала Хаара $\Delta = \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$, $0 \leqslant k < 2^n$, $n = 0, 1, \ldots$, имеет место неравенство

$$\left| \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \psi(x)\, dx \right| \left| \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} |\psi(x)|^{-\frac{1}{p-1}} dx \right|^{p-1} \leqslant B_p;$$

б) *система Хаара является базисом в пространстве* $l^p|\psi dx|$;

в) *система Хаара является безусловным базисом в пространстве* $l^p|\psi dx|$;

г) *система Уолша является базисом в пространстве* $l^p|\psi dx|$;

д) *функция* $[\psi(x)]^{-1}$ *принадлежит пространству* $L^{1/p-1}[0, 1]$ *и имеет место обобщенное неравенство Пэли*

$$c_p \left| \int_0^1 |f(x)|^p \psi(x) dx \right|^{1/p} \leqslant \left| \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \gamma_k^2(x) \right|^{p/2} \psi(x) dx \right|^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C_p \left| \int_0^1 |f(x)|^p \psi(x)\, dx \right|^{1/p},$$

где $a_k = \int_0^1 f(t)\gamma_k(t) dt$, $k = 1, 2, \ldots$, *и* c_p *и* C_p*—положительные константы зависящие только от* $p > L$.

Отметим, что в этой заметке все утверждения о системе Уолша верны как в нумерации Уолша так и в нумерации Пэли. Эквивалентность условий (а) и (б) теоремы 1 следует из теоремы 7* работы ([1]). То, что условие (д) следует из условия (а), доказано в работе Р. Ганди и Р. Уидена ([4]).

Импликация (д)→(в) доказывается по аналогии доказательства безусловной базисности Хаара из неравенства Пэли ([6]).

Условие (г) следует из условия (в) согласно сформулированной в работе ([1]) теореме 9.

Отметим, что условие (а) теоремы 1 слабее условия (A_p). Действительно, если возьмем

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [0, 1/2] \\ 2^{\alpha n}, & \text{при } x \in (1/2 + 1/2^{n+1}, 1/2 + 1/2^n), \ n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где $0 < \alpha < 1$, то для любого $p > 1$ условие (а) теоремы 1 имеет место, но если в условии (A_p) в качестве интервалов I взять интервалы $(1/2 - 1/2^n, 1/2 + 1/2^n)$, $n = 1, 2, \ldots$, то левое выражение в неравенстве (A_p) не будет ограниченным.

Из работы ([4]) нам стало известно, что И. Хиршманом ([7]), работа которого к сожалению нам пока не доступна, были рассмотрены

---

* Ранее этот результат был опубликован в работе А. С. Крапиберга «Тр. Моск. ин-та электрон. машиностр.», вып. 24, 14—21, 1972

весы $\psi(x)=|x|^{\alpha}$, $-1<\alpha<p-1$, для которых имеет место условие (д) теоремы 1.

Для подсистем системы Хаара имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *— система функций Хаара, полученная выбрасыванием из системы Хаара конечного числа функций, функция* $\psi(x)>0$ *почти всюду и* $p>1$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(α) *система* $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *является базисом в* $L^p[\psi dx]$

(β) *система* $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *является безусловным базисом в* $L^p[\psi dx]$.

Для функции $\psi(x)$ найдены также необходимые и достаточные условия, чтобы система $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ была базисом и безусловным базисом в пространстве $L^p[\psi dx]$, $p>1$, но сейчас мы не будем подробно на этом останавливаться, а только приведем эти условия для частного случая, когда из системы Хаара удалена первая функция.

Теорема 3. *Пусть* $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *— система Хаара,* $\psi(x)$ *— почти всюду положительная функция и* $p>1$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

(α′) *система* $\{\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ *является базисом в* $L^p[\psi dx]$;

(β′) *система* $\{\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ *является безусловным базисом в* $L^p[\psi dx]$.

(γ′) *существует число* $B_p>0$ *и последовательность интервалов Хаара*

$$\Delta_0\supset\Delta_1\supset\ldots\supset\Delta_k\supset\ldots,\ \text{где}\ |\Delta_k|=1/2^k,\ k=0,\ 1,\ \ldots,$$

для которых

$$[\psi(x)]^{-1}\overline{\in}L^{1/p-1}[\Delta_k]\quad\text{и}\quad[\psi(x)]^{-1}\in L^{1/p-1}[C\Delta_k];$$

$$\left[\frac{1}{|\Delta_k|}\int_{\Delta_k}\psi(x)\,dx\right]\left[\frac{1}{|\Delta_k|}\int_{C\Delta_k}[\psi(x)]^{-\frac{1}{p-1}}dx\right]^{p-1}\leqslant B_p,$$

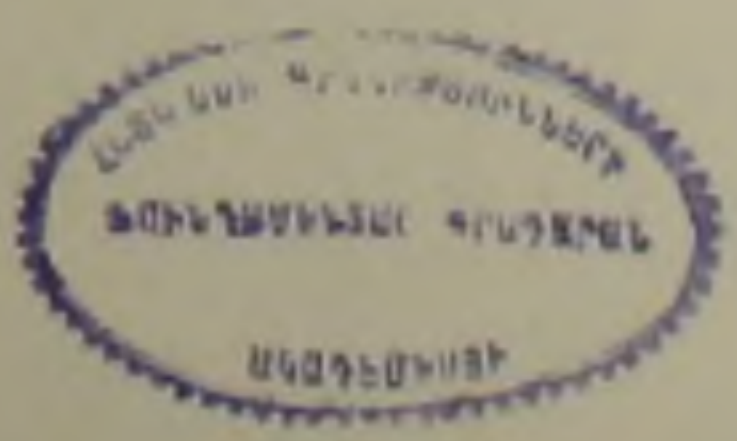
и для любого интервала Хаара Δ, *который не совпадает ни с одним из интервалов* Δ_k, $k=0,\ 1,\ \ldots$,

$$\left|\frac{1}{|\Delta|}\int_{\Delta}\psi(x)dx\right|\left|\frac{1}{|\Delta|}\int_{\Delta}[\psi(x)]^{-\frac{1}{p-1}}dx\right|^{p-1}\leqslant B_p,$$

где $C\Delta_k=[0,1]-\Delta_k$ *и через* $L^{1/p-1}[\Delta_k]$ *обозначено пространство функций, интегрируемых по модулю на интервале* Δ_k *в степени* $1/p-1$ *обычной мерой Лебега.*

Для подсистем тригонометрической системы и системы Уолша имеет место следующая теорема, доказанная в работе (²).

Теорема 4. *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *— система функций полученная из тригонометрической системы или из системы Уолша удалением конечного числа функций.*



Тогда, какова бы ни была измеримая почти всюду положительная функция $\psi(x)$, *система* $|f_n(x)|_{n=1}^{\infty}$ *не будет базисом ни в одном из пространств* $L^p|\psi dx|$, $1 \leqslant p < \infty$.

Из эквивалентности условий (а) и (д) теоремы 1, таким же образом как и у К. Н. Бабенко ([8]) (см. также работу А. М. Олевского ([9])), получается следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $|W_n(x)|_{n=1}^{\infty}$—*система Уолша, и* $\psi(x)$—*положительная функция такая, что имеет место условие* (а) *теоремы* 1 *для* $p=2$, *тогда если одна из функций* $\psi(x)$ *и* $|\psi(x)|^{-1}$ *не ограничена, то система функций* $|M(x)W_n(x)|_{n=1}^{\infty}$, *где* $M(x)=|\psi(x)|^{1/2}$ *является условным базисом в* $L^2|0, 1|$.

Заметим, что такая же теорема для тригонометрической системы следует из теоремы (HMW).

Имеет место следующий результат.

Теорема 6. *Пусть* $|H_n(x)|_{n=1}^{\infty}$—*система Хаара или некоторая ее подсистема полученная выбрасыванием из нее конечного числа функций. Тогда если системи* $|H_n(x)|_{n=1}^{\infty}$ *является замкнутой минимальной системой в* $L^p|\psi dx|$, $1 \leqslant p < \infty$, *где* $\psi(x)>0$ *почти всюду, то сопряженная ей система функций* $|H_n'(x)|_{n=1}^{\infty}$ *тотальна в* $L^p|\psi dx|$, *и для любой функции* $f(x)$ *из пространства* $L^p|\psi dx|$ *имеем, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n H_n(x) = f(x) \quad \text{почти всюду}$$

где

$$a_n = \int_0^1 f H_n' \psi dx.$$

Отметим, что если обозначим $\psi(x)=|L(x)|^p$, $1 < p < \infty$, где $L(x)$—функция из теоремы 5 работы ([10]), то система функций $|\gamma_n(x)|_{n=2}^{\infty}$ будет замкнутой минимальной системой в $L^p|\psi dx|$, сопряженная система которой тотальна в $L^p|\psi dx|$, но не является базисом в $L^p|\psi dx|$. Такие весовые пространства можно найти для любых подпоследовательностей системы Хаара, полученных из нее выбрасыванием конечного набора функций.

В заключение выражаю благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляну за ценные обсуждения результатов настоящей работы.

Институт математики Академии наук Армянской ССР

Ղ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Կշռային L^p, $1<p<\infty$, տարածություններում բազիսների և ոչպայմանական բազիսների մասին

Ուսումնասիրված է այն դրական բացարձակ անընդհատ և չափերի ուսումնասիրության հարցը, որոնց համար կլասիկ օրթոնորմալ սիստեմները $L^p(d\mu)$ տարածություններում հանդիսանում են բազիս, ոչպայմանական բազիս։ Այդ ուղղությամբ պատասխան տվող [1,2] աշխատանքների արդյունքներից բացի գտնված են նաև անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի Հաարի սիստեմը և նրա ենթասիստեմները լինեն ոչպայմանական բազիս $L^p(d\mu)$, $1<p<\infty$, տարածություններում, ինչպես նաև անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի Վուլշի սիստեմը հանդիսանա բազիս $L^p(d\mu)$, $1<p<\infty$, տարածություններում։

Բերված է նաև արդյունք Հաարի սիստեմի և նրա ենթասիստեմների համար $L^p(d\mu)$, $1\le p<\infty$, տարածություններում Մարկուշևիչի բազիս և զուգամիտության սիստեմ լինելու մասին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. С. Казарян*, ДАН АРМ. ССР, т. LXIV, №3 (1977). [2] *К. С. Казарян*, Analysis Matematica, т. 4. F. 1 (1978) т. 3. №4. [3] *R. Hunt, B. Muckenhoupt and R. Wheeden*, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. 176, February 1973 (227-251). [4] *R. F. Gundy and R. L. Wheeden*, Studia Math., т. XLIX 107-127 (1974). [5] *R. E. A. C. Paley*, Proc. o. Lomd. Math Soc., Ser. 2. 1932. 34, 241-279. [6] *J. Marcinkiewicz*, Ann Soc. polon Math., 1937 16, 85-96. [7] *I. I. Hirschman*, Memoirs A. M. S. no 15 (1955). [8] *К. И. Бабенко*, ДАН ССР. т. LXII, №2 стр. 157-160 (1948). [9] *А. М. Олевский*, Матем. заметки, т. 12, №1, стр. 73-84 (1972). [10] *К. С. Казарян*, ДАН АРМ. ССР, т. LXII. №4 (1976).