ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXV 1977 5

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. Е. Аветисян

К теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. Аракеляном 21/IX 1977)

В работе М. М. Джрбашяна и автора ([1]) был введен класс функций $H_2[\alpha;\omega]\left(\frac{1}{2}<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1\right)$. Это совокупность функций, голоморфных в области

$$\Delta(\alpha)=\left\{z:|\arg z|<\frac{\pi}{2\alpha},\quad 0<|z|<\infty\right\}$$

и удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega\,dr\leqslant M_F<+\infty\qquad |\varphi|<\frac{\pi}{2\alpha},\tag{1}$$

где M_F не зависит от φ. Там же была установлена следующая теорема (теорема 3 стр. 408).

Теорема А. *Если* $F(z)\in H_2[\alpha;\omega]$, *то для любого* $\rho>\frac{\alpha}{2\alpha-1}$, $\mu=\frac{1+\rho+\omega}{2\rho}$ *справедливо интегральное представление*

$$F(r^{1/\rho}e^{i\varphi})r^{\mu-1}=\frac{d}{dr}\left\{r^\mu\int_0^\infty E_\rho\left(r^{1/\rho}e^{i\varphi}\tau^{1/\rho}e^{i(1/\alpha+1/\rho)\pi/2};\ \mu+1\right)\tau^{\mu-1}v_{(-)}(\tau)d\tau\right\}+$$

$$+\frac{d}{dr}\left\{r^\mu\int_0^\infty E_\rho\left(r^{1/\rho}e^{i\varphi}\tau^{1/\rho}e^{-i(1/\alpha+1/\rho)\pi/2};\ \mu+1\right)\tau^{\mu-1}v_{(+)}(\tau)d\tau\right\}.\tag{2}$$

Для всех $|\varphi|\leqslant\pi/2\alpha$, *где почти всюду на* $(0,\infty)$

$$v_{(\pm)}(\tau)=\frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty\frac{e^{\pm it\tau}-1}{\pm it}F\left(t^{1/\rho}e^{\pm i\pi/2\alpha}\right)t^{\mu-1}\,dt\in L_2(0,\infty).\tag{3}$$

При этом для $|\varphi|=\pi/2\alpha$ равенство (2) *имеет место почти всюду на* $(0, \infty)$, *а для* $z\in\Delta(\alpha)$ *его можно записать в виде*

$$F(z)=\int\limits_0^\infty E_\rho\left(ze^{i(1/\alpha+1/\rho)\pi/2}\,\tau^{1/\rho};\,\mu\right)\tau^{\mu-1}v_{(-)}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^\infty E_\rho\left(ze^{-i(1/\alpha+1/\rho)\pi/2}\,\tau^{1/\rho};\,\mu\right)\tau^{\mu-1}v_{(+)}(\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

где интегралы справа сходятся абсолютно.

Далее была доказана (стр. 414, теорема 4)

Теорема Б. *Если* $F(z)$ *определяется по формуле* (4), *где* $v_{(\pm)}(\tau)$ — *произвольные функции из* $L_2(0, \infty)$, *а параметры* ρ, α, ω, μ *имеют прежние значения, то она принадлежит классу* $H_2[\alpha;\ \omega]$.

Однако из формулы (4) произвольные функции $v_{(\pm)}(\tau)\in L_2(0, \infty)$ не определяются по формулам (3). Оказывается, что представление функции класса $H_2[\alpha;\ \omega]$ не единственно, т. е. ту же функцию $F(z)$ из класса $H_2[\alpha;\ \omega]$ в области $\Delta(\alpha)$ можно представить по формуле типа (4), но с другими функциями $v^*_{(\pm)}(\tau)\in L_2(0, \infty)$. Поэтому невозможно восстановить функции $v_{(\pm)}(\tau)$ по значениям $F(z)$ в области $\Delta(\alpha)$.

Естественно возникает вопрос: какие дополнительные данные нужны для восстановления функций $v_{(\pm)}(\tau)\in L_2(0, \infty)$?

В настоящей заметке дается ответ на поставленный вопрос. Далее полученный результат обобщается на случай, когда число слагаемых интегралов в преобразовании типа (4) больше двух. И в заключение приводится теорема о расщеплении функции интегрируемой с квадратом на заданной конечной системе лучей, исходящих из начала координат.

1°. Пусть $v_{(\pm)}(\tau)$—произвольные функции из класса $L_2(0, \infty)$.

Рассмотрим функцию

$$F(z)=\int\limits_0^\infty E_\rho\left(ze^{i(1/\alpha+1/\rho)\pi/2}\,\tau^{1/\rho};\,\mu\right)\tau^{\mu-1}\,v_{(-)}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^\infty E_\rho\left(ze^{-i(1/\alpha+1/\rho)\pi/2}\,\tau^{1/\rho};\,\mu\right)\tau^{\mu-1}\,v_{(+)}(\tau)\,d\tau \tag{5}$$

где $\rho>\dfrac{2\alpha}{2\alpha-1}$, $\quad\mu=\dfrac{1+\rho+\omega}{2\rho}$, $\quad -1<\omega<1$

Как известно ([2]) определенная формулой (5) функция $F(z)$ голоморфна в областях Δ_1 и Δ_2:

$$\Delta_1=\Delta(\alpha)=\left\{z;\ |\arg z|<\frac{\pi}{2\alpha},\quad 0<|z|<\infty\right\}$$

$$\Delta_2 = \left\{ z; |\arg z| > \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho}, \qquad 0 < |z| < \infty \right\}$$

и удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega} dr < M_\varphi < \infty,$$

где $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ и $|\varphi| > \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho}$ (M_φ — не зависит от φ). Это мы кратко запишем так: $F(z) \in H_{2,\omega}(\Delta_1)$ и $F(z) \in H_{2,\omega}(\Delta_2)$.

Следующая теорема дает фактически формулу обращения для (5).

Теорема 1. *Если по произвольным функциям* $v_{(\pm)}(\tau)$ *из класса* $L_2(0, \infty)$ *составить функцию*

$$F(z) = \int_0^\infty E_\rho\left(ze^{i(1/\alpha+1/\rho)\pi/2}\tau^{1/\rho}; \mu\right)\tau^{\mu-1}v_{(-)}(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty E_\rho\left(ze^{-i(1/\alpha+1/\rho)\pi/2}\tau^{1/\rho}, \mu\right)\tau^{\mu-1}v_{(+)}(\tau)\,d\tau,$$

где

$$\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha - 1}, \qquad \mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}, \qquad -1 < \omega < 1.$$

то почти всюду на $(0, \infty)$ *справедливы следующие формулы обращения*

$$v_{(-)}(\tau) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{e^{-it\tau}-1}{-it} F\left(t^{1/\rho}e^{-i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)t^{\mu-1}dt +$$

$$+ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{e^{it\tau}-1}{it} F\left(t^{1/\rho}e^{-i(\pi/2\alpha+\pi/\rho)}\right)t^{\mu-1}dt,$$

$$v_{(+)}(\tau) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{e^{i\tau t}-1}{it} F\left(t^{1/\rho}e^{i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)t^{\mu-1}dt +$$

$$+ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{e^{-i\tau t}-1}{-it} F\left(t^{1/\rho}e^{i(\pi/2\alpha+\pi/\rho)}\right)t^{\mu-1}dt.$$

2°. Пусть $v_k(\tau) \in L_2(0, \infty)$, $k = 1, 2, \ldots n$ произвольны. Рассмотрим функцию

$$F(z)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty E_\rho\left(ze^{-i\varphi_k}\tau^{1/\rho};\ \mu\right)\tau^{\mu-1}v_k(\tau)d\tau, \tag{6}$$

где предполагается

$$0\leqslant\varphi_1<\varphi_2<\cdots<\varphi_n<2\pi$$

и

$$\rho>\alpha=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{\pi}{\varphi_{k+1}-\varphi_k}\right|\quad(\varphi_{n+1}=\varphi_1+2\pi).$$

Тогда формула (6) определяет, вообще говоря, разные аналитические функции в угловых областях Δ_k ($k=1, 2, \ldots, n$):

$$\Delta_k=\left\{z;\ \varphi_k+\frac{\pi}{2\rho}<\operatorname{Arg}z<\varphi_{k+1}-\frac{\pi}{2\rho},\quad 0<|z|<\infty\right\}.$$

При этом $F(z)\in H_{2,\omega}(\Delta_k)$ $k=1, 2, \ldots, n$.

При сделанных предположениях относительно φ_k ($k=1, 2, \ldots, n$) и ρ, верна

Теорема 2. *Если для произвольных функций $v_k(\tau)\in L_2(0, \infty)$ ($k=1, 2, \ldots, n$) составить функцию*

$$F(z)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty E_\rho\left(ze^{-i\varphi_k}\tau^{1/\rho};\ \mu\right)\tau^{\mu-1}v_k(\tau)d\tau,$$

где $\mu=\dfrac{1+\rho+\omega}{2\rho}$, $-1<\omega<1$, *то почти всюду на* $(0, \infty)$ *справедливы следующие формулы обращения* $k=1, 2, \ldots, n$

$$v_k(\tau)=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty\frac{e^{i\tau t}-1}{it}F\left(t^{1/\rho}e^{i\left(\varphi_k+\frac{\pi}{2\rho}\right)}\right)t^{\mu-1}dt+$$

$$+\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}F\left(t^{1/\rho}e^{i\left(\varphi_k-\frac{\pi}{2\rho}\right)}\right)t^{\mu-1}dt$$

3°. Пусть Γ означает совокупность лучей $\arg z=\varphi_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, $0\leqslant\varphi_1<\varphi_2<\cdots<\varphi_n<2\pi$, исходящих из начала координат. Γ разбивает плоскость на n угловых областей D_k, $k=1, 2, \ldots, n$:

$$D_k=\{z;\ \varphi_k<\operatorname{Arg}z<\varphi_{k+1};\ 0<|z|<\infty\}\quad(\varphi_{n+1}=\varphi_1+2\pi).$$

Пусть $U(\zeta)$ произвольная функция из класса $L_{2,-\omega}(\Gamma)$ ($-1<\omega<1$), т. е. определена на системе лучей Γ и удовлетворяет условию

$$\int_\Gamma|U(\zeta)|^2|\zeta|^{-\omega}d|\zeta|=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty|U(re^{i\varphi_k})|^2r^{-\omega}dr<\infty.$$

Обозначим через $H_{2,-\omega}(D_k)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ класс функций $g(z)$, голоморфных в области D_k и удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty |g(re^{i\varphi})|^2 r^{-\omega} dr < M < \infty, \quad \varphi_k < \varphi < \varphi_{k+1}. \tag{7}$$

Известно ([1,2]), что функции класса $H_{2,-\omega}(D_k)$ почти всюду имеют граничные значения $g(re^{i\varphi_k})$ и $g(re^{i\varphi_{k+1}})$, которые также удовлетворяют условию (7). Следующая теорема является следствием теоремы 2.

Теорема 3. *Для данной системы* Γ *и данной функции* $U(\zeta) \in L_{2-\omega}(\Gamma)$ *существует единственный набор функций* $g_k(z) \in H_{2,-\omega}(D_k)$, *таких что*

$$U(re^{i\varphi_k}) = g_{k-1}(re^{i\varphi_k}) - g_k(re^{i\varphi_k})$$

$$(k=2, 3, \ldots, n+1, \ g_{n+1}(z) \equiv g_1(z)).$$

Отметим, что при $n=2$ утверждение теоремы 3 фактически содержится в совместной работе С. А. Акопяна и Н. О. Хачатряна ([3]).

Ереванский институт народного хозяйства

Ա. Ե. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Մ. Մ. Ջրբաշյանի ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսության մասին

Ներկա աշխատանքում, որոշակի պայմանների դեպքում, տրվում է Մ. Մ. Ջրբաշյանի և հեղինակի կողմից դիտարկված ([1]) ձևափոխության համար շրջման բանաձև, երբ $\Psi_{(\pm)}(\tau)$ ֆունկցիաները կամայական են $L_2(0, \infty)$ դասից։ Այնուհետև այդ արդյունքը ընդհանրացվում է այն դեպքի համար, երբ գումարելիների թիվը ([1]) տիպի ձևափոխության մեջ երկուսից ավելի է։ Վերջում բերվում է մի կետից ելնող ճառագայթների սիստեմի վրա տված և քառակուսով ինտեգրելի (թույլ կշռով) ֆունկցիաների տրոհման մասին թեորեմ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*, Сиб. матем. ж., I, № 3, 383—426 (1960).
[2] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966. [3] *С. А. Акопян, Н. О. Хачатрян*, «Известия АН СССР», матем. сер., т. 40, № 1, 96—114 (1976).