ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXV 1977 5

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

О. М. Хосровян

О комплексных однородных пространствах с двумя концами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 2/IX 1977)

В работе описываются однородные пространства G/U полупростых комплексных групп Ли G со связной комплексной стационарной подгруппой U, имеющие два конца в смысле Фрейденталя. Это условие равносильно тому, что G/U гомеоморфно $K/L\times R$, где $K\subset G$, $L\subset U$ — максимальные компактные подгруппы ([1]). В случае, когда U — алгебраическая подгруппа, задача описания таких подгрупп была решена Д. Н. Ахиезером ([2]).

Будем обозначать связные группы Ли заглавными, а алгебры Ли — соответствующими малыми латинскими буквами.

Пусть g — полупростая комплексная алгебра Ли. Подалгебра $p\subset g$ называется параболической, если она содержит максимальную разрешимую подалгебру. Хорошо известно, что параболические подалгебры в g сопряжены стандартным параболическим подалгебрам, которые строятся следующим образом: пусть $h\subset g$ — подалгебра Картана, $\sum$ — система корней, g^{α} — корневые подпространства и π — система простых корней. Тогда стандартная параболическая подалгебра p определяется подмножеством $\Gamma\subset\pi$ и имеет вид $p=s_{\Gamma}+c_{\Gamma}+n_{\Gamma}$, где s_{Γ} — полупростая подалгебра, $s_{\Gamma}+c_{\Gamma}$ — редуктивная подалгебра, а n_{Γ} — нильпотентный радикал в p, причем $n_{\Gamma}=\sum\limits_{\Sigma_{+}^{\Gamma}} g^{\alpha}$,

где Σ_{+}^{Γ} — система положительных корней, не выражающихся через Γ, $c_{\Gamma}=\{x\in h|\alpha(x)=0\ (\alpha\in\Gamma)\}$, s_{Γ} порождается подпространствами g^{α}, где α выражаются через Γ. Соответствующие подгруппы в полупростой группе G также называются параболическими. Через e_{α} будет в дальнейшем обозначать некоторый ненулевой вектор из g^{α}.

Пусть U — алгебраическая подгруппа в G.
Тогда:

1) G/U компактно тогда и только тогда, когда U — параболическая подгруппа ([3]).

2) G/U имеет два конца тогда и только тогда, когда U содер-

жится в некоторой параболической подгруппе $P\subset G$ причем $U=\operatorname{Ker}\chi$, где $\chi: P\to C^*$ — нетривиальный рациональный гомоморфизм ([2]).

Дадим теперь описание двух классов связных замкнутых комплексных подгрупп $U\subset G$ таких, что G/U имеет два конца.

I. Пусть P — стандартная параболическая подгруппа в G и

$$p=s_\Gamma+c_\Gamma+n_\Gamma, \tag{1}$$

где $\Gamma\subset\pi$. Выберем в C_Γ связную замкнутую комплексную подгруппу B так, чтобы C_Γ/B имело два конца. Положим $U=S_\Gamma BN_\Gamma$. Тогда U — связная комплексная подгруппа в P и $P/U\cong C_\Gamma/B$ имеет два конца. Поскольку G/P компактно, G/U имеет два конца ([2]). Из упомянутого выше результата Д. Н. Ахиезера следует, что всякая связная алгебраическая подгруппа $U\subset G$ такая, что G/U имеет два конца, сопряжена одной из подгрупп этого класса.

II. Пусть опять p имеет вид (1). Фиксируем $\alpha\in\pi\setminus\Gamma$, при условии, что $(\alpha,\gamma)=0$ для всех $\gamma\in\Gamma$. Тогда $\alpha|_{c_\Gamma}\neq 0$. Пусть F — связная подгруппа, отвечающая подалгебре $f=s_\Gamma+c_{\Gamma\cup\{\alpha\}}+n_\Gamma$. Из предыдущего пункта I ясно, что G/F имеет два конца, так как $C_\Gamma/C_{\Gamma\cup\{\alpha\}}\cong C^*$ имеет два конца. Далее $q=c_{\Gamma\cup\{\alpha\}}+g^\alpha$ — абелева подалгебра. Положим $m=\sum\limits_{\beta\in\Sigma_+^\Gamma\setminus\{\alpha\}} g^\beta$. Тогда $f=s_\Gamma+q+m$, причем $[q,m]\subset m$. Легко доказать, что

$$[s_\Gamma, q+m]\subset m. \tag{2}$$

Выберем в абелевой подгруппе $Q\subset G$ такую связную замкнутую комплексную подгруппу B, чтобы Q/B было компактно, причем $e_\alpha\notin b$ и положим $u=s_\Gamma+b+m$. Из соотношения (2) следует, что $[s_\Gamma, b+m]\subset m$. Следовательно, u — подалгебра в g, а $b+m$ и m — идеалы в u. Отсюда следует, что $U=S_\Gamma BM$ — связная замкнутая комплексная подгруппа. Легко заметить, что F/U диффеоморфно компактной группе Q/B. Значит, G/U имеет два конца ([2]). Из условия $e_\alpha\notin b$ вытекает, что подгруппа U не есть подгруппа класса I. Подгруппы $B\subset C_\Gamma$ и $B\subset Q$, удовлетворяющие требуемым условиям, можно описать с помощью следствия сформулированной ниже теоремы 2. Основной наш результат состоит в следующем.

Теорема 1. *Если $U\subset G$ — связная замкнутая комплексная подгруппа и G/U имеет два конца, то U сопряжена одной из подгрупп классов* I *и* II.

Доказательство теоремы 1 основано на рассмотрении алгебраического замыкания $\hat U$ подгруппы U. Возможны два случая ([2]):

1) $G/\hat U$ компактно, $\hat U/U$ имеет два конца.

2) $G/\hat U$ имеет два конца, $\hat U/U$ компактно.

В первом случае $\hat{U}$ параболична, и легко доказывается, что U сопряжена подгруппе класса I. Во втором случае к подгруппе $\hat{U}$ можно применить результат Д. Н. Ахиезера [2]. Из него выводится, что U сопряжена или подгруппе класса I, или подгруппе класса II.

Пусть G—связная вещественная абелева группа Ли. Тогда известно, что $G=T\times V$, где $T\simeq T^n$ (n—мерный тор)—максимальная компактная подгруппа, а $V\simeq R^m$—векторная часть. Пусть $\exp: g\to G$—экспоненциальное отображение. Каждое подпространство $u\subset g$ определяет связную абелеву подгруппу $U=\exp u$. Выясним, в каком случае подгруппа U замкнута, и найдем в этом случае строение фактор-группы G/U. Рассмотрим ограничение $\exp: t\to T$ и обозначим $\Gamma=\mathrm{Ker}(\exp|t)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы U была замкнута в G, необходимо и достаточно, чтобы $u\cap t$ имела базис, принадлежащий Γ. При этом $G/U\cong T^p\times R^q$, где $p=n-\nu$, $q=m+\nu-\dim u$, если положить $\nu=\dim(u\cap t)$.*

Рассмотрим теперь случай, когда G—связная комплексная абелева группа Ли, а u—комплексное подпространство в g. Тогда $U=\exp u$—связная комплексная абелева подгруппа Ли в G. Разберем простейший пример, когда $G=C^{*n}\times C^m$. В этом случае $g=C^n\times C^m=C^{n+m}$. Из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Пусть $u\subset g=C^{n+m}$—комплексное подпространство. Для того, чтобы $U=\exp u$ была замкнута в $G=C^{*n}\times C^m$ необходимо и достаточно, чтобы $u\cap iR^n$ имело над R базис вида $2\pi i\gamma_1, \ldots, 2\pi i\gamma_\nu$, где $\gamma_j\in Z^n$. При этом $G/U\simeq T^p\times R^q$ (как вещественные группы Ли), где $p=n-\nu$, $q=n+2m+\nu-2\dim_C u$.*

В заключение приношу благодарность А. Л. Онищику за внимание к этой работе.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Հ. Ս. ԽՈՍՐՈՎՅԱՆ

Երկու ծայր ունեցող կոմպլեքս համասեռ տարածությունների մասին

Հոդվածում ուսումնասիրվում են Ֆրեյդենտալի իմաստով երկու ծայր ունեցող համասեռ տարածությունները։

Նկարագրված են G կոմպլեքս կիսապարզ Լիի խմբի բոլոր կապակցված կոմպլեքս ստացիոնար U ենթախմբերը, որոնց դեպքում G/U համասեռ տարածություններն ունեն երկու ծայր Ֆրեյդենտալի իմաստով։ Նկարագրված են նաև նույն պայմանին բավարարող բոլոր կապակցված փակ U ենթախմբերը, երբ G-ն իրական աբելյան և կոմպլեքս աբելյան Լիի խումբ է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. Borel*. Les bouts des espaces homogènes de groupes de Lie. Ann. Math. 58, № 3 443—457 (1953). [2] *Д. Н. Ахиезер*. Известия АН СССР. Сер. матем., 41 303—324 (1977). [3] *А. Борель, Ж. Титс*. Редуктивные группы. „Математика". 11, № 1, 43—111 (1967).