ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXV 1977 5

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Л. А. Асланян, В. М. Караханян, Б. Е. Торосян

Решение дискретной изопериметрической задачи

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 23/VII 1977)

В данной работе рассматривается дискретный аналог классической изопериметрической задачи (1).

Рассмотрим множество E^n вершин n-мерного единичного куба. Пусть $S_k^n(\alpha)$ шар в метрике Хэмминга с центром в точке $\alpha\in E^n$ и радиуса k. Для подмножества $A\subseteq E^n$ скажем, что вершина $\alpha\in A$ внутренняя, если $S_1^n(\alpha)\subseteq A$. В противном случае вершину $\alpha\in A$ назовем граничной вершиной подмножества A. Обозначим через $\Gamma(A)$ и $P(A)$, соответственно, множество всех граничных и внутренних вершин подмножества $A\subseteq E^n$.

Дискретная изопериметрическая задача в E^n по произвольному заданному целому числу a, $0\leq a\leq 2^n$ требует найти такое подмножество $A\subseteq E^n$, $|A|=a$, что

$$|\Gamma(A)|=\min_{B\subseteq E^n,\ |B|=a}|\Gamma(B)|=\Gamma(a).$$

Ищутся также все решения этой задачи и вид функции $\Gamma(a)$.

Некоторые частные результаты по этой задаче были получены Р. Г. Нигматуллиным (2). Решение задачи приводимое ниже, на самом деле, может быть сформулировано для более общего случая (в многомерном многозначном кубе), однако мы ограничимся изложением более простого двузначного случая, при $k=1$.

1. Исключая из рассмотрения тривиальные случаи $a=0$ и $a=2^n$ представим рассматриваемую мощность a в следующем виде

$$a=\sum_{i=0}^{k} C_n^i+\delta,\quad \text{где } 0<k<n \quad \text{и} \quad 0\leq\delta<C_n^{k+1}. \qquad (1)$$

Скажем, что подмножество $A\subseteq E^n$ представляет стандартное размещение мощности a, если существует такая вершина $\alpha\in E^n$ и такое упорядочение рассматриваемых n переменных—$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$, что а) при $\delta \leqslant C^k_{n-1}$ множество A состоит из шара $S^{n-1}_k(\alpha)$ подкуба $E^n_{\alpha_{i_1}}(i_1)$ и стандартного размещения мощности $\sum\limits_{l=0}^{k-1} C^l_{n-1}+\delta$ подкуба $E^n_{\overline{\alpha}_{i_1}}(i_1)$ относительно упорядочения $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ переменных, и точки $\alpha(i_1)$, являющейся проекцией по направлению x_{i_1} от точки α, и

б) при $\delta > C^k_{n-1}$ множество A состоит из шара $S^{n-1}_k(\alpha(i_1))$ подкуба $E^n_{\overline{\alpha}_{i_1}}(i_1)$ и стандартного размещения мощности $\sum\limits_{l=0}^{k-1} C^l_{n-1}+\delta$ подкуба $E^n_{\alpha_{i_1}}(i_1)$ относительно последовательности $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$, и точки α.

Точку $\alpha \in E^n$ назовем центром стандартного размещения $A \subseteq E^n$. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением стандартных размещений относительно исходной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ переменных и точки $\vec{0}^n = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$, поскольку общий случай является лишь формальным обобщением этого.

Легко убедиться, что приведенное индуктивное определение стандартного размещения равносильно заданию линейного упорядочения L^n вершин E^n, определяемого следующими правилами:

если α и β — вершины E^n, то считаем, что $\alpha < \beta$ (α предшествует β) тогда и только тогда, когда

1) $|\alpha| < |\beta|$, то есть когда число единиц набора α меньше числа единиц набора β, или когда

2) $|\alpha| = |\beta|$, и существует такой номер r, $1 \leqslant r \leqslant n$, для которого $\alpha_i = \beta_i$, при $i < r$ и $a_r = 1$, $\beta_r = 0$, то есть когда набор β лексикографически предшествует набору α, принадлежащий тому же слою.

В дальнейшем через L^n_a и T^n_a будем обозначать, соответственно, начальный и конечный отрезки стандартной последовательности L^n, длины a, $0 \leqslant a \leqslant 2^n$.

Лемма 1. *Для каждой мощности a, $0 \leqslant a \leqslant 2^n$, внутренние точки последовательности $L^n_a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a\}$ предшествует его граничным точкам.*

Следующее свойство стандартного размещения, на котором мы остановимся, заключается в специальном строении разбиений стандартного размещения. Рассмотрим произвольное стандартное размещение $A = L^n_a$ и его разбиение $A = A^0(i) \cup A^1(i)$ по координате x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда

а) $A^0(i) = L^{n-1}_{|A^0(i)|}$ и $A^1(i) = L^{n-1}_{|A^1(i)|}$, где L^{n-1}_t означает начальный отрезок длины t стандартной последовательности в E^{n-1}, и

б) для $i = 1$ $\Gamma(A) = \Gamma(A^0(i)) \cup \Gamma(A^1(i))$, если $|A| \geqslant 2^n - 1$.

Кроме того, для системы разбиений произвольного подмножества $A \subseteq E^n$ имеет место

Лемма 2. *Если для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$ $A^0(i) = L^{n-1}_{|A^0(i)|}$ и $A^1(i) = L^{n-1}_{|A^1(i)|}$, то $A = L^n_a$, или же $A = L^n_{2^{n-1}-1} \cup \alpha_{2^{n-1}+1}$.*

Лемма 3. *Рассмотрим произвольные стандартные размещения A и B, мощностей a и b соответственно. Если $a \geqslant b$,*

$$a=\sum_{i=0}^{k} C_n^i+\delta_1,\ 0\leqslant\delta_1<C_n^{k+1},\quad b=\sum_{i=0}^{r} C_n^i+\delta_2,\ 0\leqslant\delta_2<C_n^{r+1},$$

A_0 и B_0 новые стандартные размещения, для которых

1) $|A_0|=\sum_{i=0}^{k} C_n^i+\delta_1+\delta_2$ *и* $|B_0|=\sum_{i=0}^{r} C_n^i$ *при* $\delta_1+\delta_2\leqslant C_n^{k+1}$, *и*

2) $|A_0|=\sum_{i=0}^{k+1} C_n^i$ *и* $|B_0|=\sum_{i=0}^{r} C_n^i+(\delta_1+\delta_2-C_n^{k+1})$ *при* $\delta_1+\delta_2>C_n^{k+1}$,

то $$|\Gamma(A_0)|+|\Gamma(B_0)|\leqslant|\Gamma(A)|+|\Gamma(B)|.$$

II. Доказанные свойства стандартного размещения вершин n-мерного единичного куба E^n позволяют сформулировать теорему о его оптимальности.

Теорема 1. *Для произвольного a, $0\leqslant a<2^n$ стандартное размещение L_a^n обладает минимальным числом — $\Gamma(a)$ граничных точек*.*

Приведем доказательство этой теоремы, индукций, относительно параметра n. Это доказательство представляет собой удобный подход к решению задач рассматриваемого типа и его полезно сопоставить с ([4]). В ней также проявляются некоторые стороны доказательств последующих результатов (теоремы 2—5).

Рассмотрим произвольное подмножество $A\subseteq E^n$, $|A|=a$. Если для каждого i, $1\leqslant i\leqslant n$ $A^0(i)=L^{n-1}_{|A^0(i)|}$ и $A^1(i)=L^{n-1}_{|A^1(i)|}$, то согласно лемме 2 $A=L_a^n$, или $A=L^n_{2^{n-1}-1}\cup x_{2^{n-1}+1}$. Не трудно убедиться, что в обоих случаях $|\Gamma(A)|\geqslant|\Gamma(L_a^n)|$.

В противном случае рассмотрим такую координату x_i, $1\leqslant i\leqslant n$, для которого имеет место хотя бы одно из следующих неравенств — $A^0(i)\neq L^{n-1}_{|A^0(i)|}$ и $A^1(i)\neq L^{n-1}_{|A^1(i)|}$. Рассмотрим разбиение $A=A^0(i)\cup A^1(i)$ подмножества $A\subseteq E^n$, и заменим подмножества $A^0(i)$ и $A^1(i)$ в подкубах $E_0^n(i)$ и $E_1^n(i)$ на $L^{n-1}_{|A^0(i)|}$ и $L^{n-1}_{|A^1(i)|}$ соответственно. В результате такого преобразования мы переходим к такому подмножеству $A_1\subseteq E^n$, для которого $|A_1|=|A|=a$ и $|\Gamma(A_1)|\leqslant|\Gamma(A)|$.

Действительно, не нарушая общности можно предположить, что $|A^0(i)|\geqslant|A^1(i)|$, и пусть $s=|A^0(i)|-|A^1(i)|\geqslant 0$. Очевидно, что для числа граничных вершин подмножества $A_1\subseteq E^n$ справедливо соотношение

$$|\Gamma(A_1)|=|\Gamma(A_1^0(i))|+|\Gamma(A_1^1(i))|+b_0,$$

где b_0 число тех внутренних точек подмножества $A_1^0(i)$ (в подкубе $E_0^n(i)$), проекции которых по направлению x_i не принадлежат множеству $A_1^1(i)$. Если $b_0=0$, то

* Как стало известно авторам после завершения работы, доказательство теоремы 1, проведенное иным методом, дано в ([4]).

$$|\Gamma(A)|\geqslant|\Gamma(A^0(i))|+|\Gamma(A^1(i))|\geqslant|\Gamma(A_1^0(i))|+|\Gamma(A_1^1(i))|=|\Gamma(A_1)|.$$

Когда же $b_0>0$, то $\varepsilon=|\Gamma(A_1^0(i))|+b_0$ и $|\Gamma(A)|\geqslant|\Gamma(A^1(i))|+|A^0(i)|-|A^1(i)|$. Согласно индуктивному предположению $|\Gamma(A^1(i))|\geqslant|\Gamma(A_1^1(i))|$, в силу чего

$$|\Gamma(A)|\geqslant|\Gamma(A_1^1(i))|+\varepsilon=|\Gamma(A_1^1(i))|-|\Gamma(A_1^0(i))|+b_0=|\Gamma(A_1)|.$$

Приведенные рассуждения в том случае, когда исходное множество A — оптимально, позволяет заключить, что построенное посредством „сжатия" подмножество $A_1\subseteq E^n$ — тоже оптимально.

По аналогии с рассмотренным случаем, исходя из множества A_1, если $A_1\neq L_a^n$ или $L^n_{2^{n-1}-1}\cup\alpha_{2^{n-1}+1}$, можно построить новое множество A_2, $|A_2|=|A_1|=a$ и $|\Gamma(A_2)|\leqslant|\Gamma(A_1)|$. В общем случае мы построим последовательность $A=A_0, A_1, \ldots, A_p, \ldots, A_p\subseteq E^n$, где $|A_p|=a$ и $|\Gamma(A_{p+1})|\leqslant|\Gamma(A_p)|$, $p=0, 1, \ldots$ В силу того, что на каждом шаге преобразований некоторые точки A_p заменяются на такие точки, которые предшествуют прежним — в последовательности L^n следует, что указанная последовательность подмножеств A_p конечная. Ясно, что по лемме 2 последнее подмножество A_p этой последовательности совпадает с L_a^n, или же с $L^n_{2^{n-1}-1}\cup\alpha_{2^{n-1}+1}$ откуда, в силу произвольности выбора подмножества $A\subseteq E^n$ следует, что $|\Gamma(L_a^n)|=\Gamma(a)$.

Общий ход доказательства теоремы позволяет сформулировать следующее утверждение.

Лемма 4. *Для произвольного подмножества* $A\subseteq E^n$ *и направления* x_i, $1\leqslant i\leqslant n$ *если* $B=L^{n-1}_{|A^0(i)|}\cup L^{n-1}_{|A^1(i)|}$, *то* $|\Gamma(B)|\leqslant|\Gamma(A)|$.

Специальное строение стандартного размещения позволяет найти простой вид для функции $\Gamma(a)$. Действительно, рассмотрим стандартное размещение A мощности (1). Исходя из индуктивного определения стандартного размещения легко убедиться, что справедливо следующее представление для числа δ:

$$\delta=C_{n-m_1}^{k-m_1+1}+C_{n-m_2}^{k-m_2+2}+\ldots+C_{n-m_r}^{k-m_r+r},\tag{2}$$

где $1\leqslant m_1<m_2<\ldots<m_r<n$. Согласно этому представлению число $p_k(\delta)$ — всех внутренних точек стандартного размещения A, принадлежащих k-ому слою E^n выражается в следующем виде.

$$p_k(\delta)=C_{n-m_1}^{k-m_1}+C_{n-m_2}^{k-m_2+1}+\ldots+C_{n-m_r}^{k-m_r+r-1}\tag{3}$$

Согласно теореме 1 и выписанным формулам (1), (2), (3) имеет место

Теорема 2. $\Gamma(a)=C_n^k+\delta-p_k(\delta)$.

Утверждение теоремы 1 оказывается полезным в решении следующей задачи, рассмотренной в ([2]). Для произвольных целых чисел a и b, $1\leqslant a$, $b\leqslant 2^n$ ищутся такие подмножества A и B n-мерного единичного куба E^n, $|A|=a$, $|B|=b$, для которых расстояние между ними, определяемое формулой $R(A, B) = \min\limits_{\alpha \in A, \beta \in B} \rho(\alpha, \beta)$ максимально, то есть $R(A, B) = R(a, b) = \max\limits_{|U|=a, |V|=b} R(U, V)$.

Теорема 3. *Для произвольных целых чисел a и b, $1 \leqslant a$, $b \leqslant 2^n$, $R(a, b) = R(L^n_a, T^n_b)$.*

$R(a, b)$ легко выразить через a и b, используя для них представления (1) и (2).

Рассмотренный дискретный аналог классической изопериметрической задачи в отличие от последней имеет не единственное решение. В этом легко убедиться на самых простых примерах. Дело в том, что в определенных ситуациях некоторое увеличение количества рассматриваемых точек, даже при оптимальном их размещении не создает новых внутренних точек и тогда ясно, что последние точки могли бы быть размещены и произвольным образом.

Теорема 4. *Для произвольного оптимального подмножества A мощности* (1) *и произвольного номера i, $1 \leqslant i \leqslant n$*

$$\min(|A^0(i)|, |A^1(i)|) \geqslant \sum_{i=0}^{k-1} C^i_{n-1}.$$

Это утверждение приводит нас к следующему заключению,

Теорема 5. *Каждое оптимальное подмножество A мощности* (1) *содержит некоторый шар радиуса k.*

Следствие 1. При $\delta = 0$ единственным оптимальным размещением мощности (1) является шар $S^n_k(\alpha)$, $\alpha \in E^n$.

Таким образом, в теореме 5 в точности до последних δ точек описываются все решения дискретной изопериметрической задачи. Более полное описание этих решений связано с серьезными трудностями. Мы здесь остановимся на одном специальном классе решений, которые связаны с известной в комбинаторике теоремой Краскаля — Катоны о „плотной упаковке" подмножеств конечного множества.

Итак, мы выделяем такие решения изопериметрической задачи, для которых существует такая точка $\alpha \in E^n$, что $S^n_k(\alpha) \subseteq A \subseteq S^n_{k+1}(\alpha)$. В этих условиях утверждение теоремы 1 представляется следующим образом.

Не нарушая общности примем, что $\alpha = \vec{0}^n$. Обозначим через $L^n_\delta(k+1)$ начальный отрезок длины δ $k+1$-го слоя E^n. Пусть для произвольного $A \subseteq E^n_{k+1}$ $H(A)$ подмножество всех тех вершин из E^n_{k+1}, которые сравнимы с элементами из A. Тогда имеет место [3]

Следствие 2. Множество $H(L^n_\delta(k+1))$ для каждого $\delta, 0 \leqslant \delta \leqslant C^{k+1}_n$ обладает минимальной мощностью по сравнению со всеми $H(A)$, $A \subseteq E^n_{k+1}$, $|A| = \delta$.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Լ. Հ. ԱՍԼԱՆՅԱՆ, Վ. Մ. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ, Բ. Ե. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծումը

Աշխատանքում դիտարկվում է կլասիկ իզոպերիմետրիկ խնդրի դիսկրետ տարբերակը։ Ապացուցվում է, որ n-չափանի միավոր խորանարդի գագաթների բառարանային կարգավորվածության վերջնահատվածներն իրենցից ներկայացնում են դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծումներ։ Ստացվում է լուծումների պարամետրերի («ծավալ» և «պարագիծ») կապը։ Ապացուցվում է, որ տված «ծավալի» դեպքում խնդրի բոլոր լուծումները պարունակում են մոտակա հնարավոր ամենամեծ շառավղով գունդ՝ Հեմինգյան հեռավորությունով։ Որպես կարևոր կիրառություններ նշում են տված հզորություններով մաքսիմալ հեռացված ենթաբազմությունների կառուցման, ինչպես նաև վերջավոր բազմության ենթաբազմությունների հատուկ ընտանիքների «սեղմ դասավորման» խնդիրները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Бляшке*, Круг и шар, М., 1967. [2] *Р. Г. Нигматуллин*, Некоторые метрические соотношения в единичном кубе, Дискретный анализ, вып. 9, 47—58, 1967. [3] *П. Эрдеш, Дж. Спенсер*, Вероятностные методы в комбинаторике (дополнение), М., 1976. [4] *L. H. Harper*, Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs, J. Combin. Theory, 1, 385—393, 1966.