ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXV 1977 4

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Г. А. Барсегян

Геометрический подход к проблеме разветвленности римановых поверхностей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 19/IX 1977)

Истоки рассматриваемого вопроса связаны с некоторыми взглядами Р. Неванлинна на теорию распределения значений мероморфных функций [1]. В обзоре 1930 г. [2] Р. Неванлинна конечную цель теории трансцендентных функций видел в точном знании соответствующей римановой поверхности (см. введение). Разумеется такое знание — это, в первую очередь, информация о трансцендентных (в частности логарифмических) и алгебраических точках ветвления римановой поверхности.

Такую информацию удалось получить [1] в случае римановых поверхностей интересного, но частного класса F_g. Однако здесь это удается за счет того, что поверхность F_g можно эффективно разбить на полулисты и исчерпывая ими F_g, считать алгебраические и логарифмические особенности связанные с этими полулистами. Эквивалентное по содержанию описание можно получить при обычном исчерпании поверхности F_g, если использовать геометрическое определение дефектных значений введенных в работе автора [3],

Изучение вопроса в общем случае Р. Неванлинна связывал с понятием дефектного значения. Он предлагал рассматривать дефект значения a функции $w(z)$, как меру трансцендентной разветвленности римановой поверхности функции $w^{(-1)}$ над точкой a (см. [1] п. 271-272; [2], §3). Это предложение основано на следующем наблюдении. Дефектность значения a, $\delta(a)>0$, или, что то же $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{N(r,a)}{T(r)}<1$ означает что значение a относительно редко принимается в любом круге $|z|\leq r$, $r>r_0$. Поэтому казалось вероятным, что возникновение дефектного значения обусловлено тем, что значение a, вообще говоря, „редко“ принимается на римановой поверхности функции $w^{(-1)}$, т. е. имеется „достаточно мощное“ множество трансцендентных особых точек на римановой поверхности функции $w^{(-1)}$, лежащих над значением a.

Однако, как выяснилось позднее, понятие дефекта не находится в непосредственной связи с трансцендентной разветвленностью римановой поверхности, так как для различных классов функций были построены примеры дефектных неасимптотических значений ([4]), и с другой стороны примеры, когда наличие трансцендентных особых точек римановой поверхности над значением a не приводит к дефектности значения a (1).

Ниже предлагается другой подход к изучению трансцендентной и алгебраической разветвленности римановой поверхности функции $w^{(-1)}$, основанный, в отличие от подхода Р. Неванлинна, на конкретной связи трансцендентных особых точек римановой поверхности и асимптотических линий функции $w(z)$.

Пусть M_Γ —множество точек полной римановой поверхности функции $w^{(-1)}$ проектирующихся в кривую Г. Исключим из M_Γ все алгебраические и трансцендентные точки. Оставшееся множество содержит набор интервалов, концами которых являются алгебраические точки ветвления, трансцендентные точки или простые точки проектирующиеся в концы кривой Г.

Пусть $\{\overline{M}_i(\Gamma)\}$ множество этих интервалов (i — номер интервала), $\{M_{il}(\Gamma)\}$ — подмножество $\{\overline{M}_i(\Gamma)\}$ включающее в себя только такие интервалы, которые имеют в качестве концевой точки хотя бы одну алгебраическую или трансцендентную точку. Обозначим через $\overline{C}(r, \Gamma)$ — количество интервалов из $\{\overline{M}_i(\Gamma)\}$ — прообразы которых имеют общие точки с кругом $|z| \leq r$. Соответственно $C(r, \Gamma)$ — количество интервалов из $\{M_{il}(\Gamma)\}$ — прообразы которых имеют общие точки с кругом $|z| \leq r$.

Теорема 1. *Пусть $w(z)$ мероморфная в $|z| < \infty$ функция, Г — ограниченная гладкая жорданова кривая в w — плоскости, c, $(c < 1)$ — произвольная постоянная. Тогда существует постоянная $K_1 = K_1(c) < \infty$, такая, что при $r > r_0$ выполняется*

$$\overline{C}(r, \Gamma) \leq K_1 T(cr). \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть $w(z)$ мероморфная $|z| < \infty$ функция. Γ_ν, $(\nu = 1, 2 \ldots g)$ — конечный набор не имеющих общих точек, ограниченных гладких жордановых кривых в w — плоскости, c, $(c > 1)$ — произвольная постоянная. Тогда существует постоянная $K_2 = K_2(c) < \infty$ такая, что при $r > r_0$ выполняется*

$$\sum_{\nu=1}^{g} C(r, \Gamma_\nu) \leq K_2 T(cr) \tag{2}$$

Теорема 2 содержит подход к вопросу описания алгебраической и трансцендентной разветвленности римановой поверхности функции $w^{(-1)}$. В сумме $C(r, \Gamma)$ фигурируют только такие интервалы, которые имеют в качестве концевой точки хотя бы одну алгебраическую или трансцендентную точку. Заметим, что для любого из этих интервалов, прообраз его, начиная с некоторого r имеет пересечение с кругом $|z| \leqslant r$. Следовательно, начиная с этого r величина $C(r, \Gamma)$ получает приращение равное единице, т. е. в величине $C(r, \Gamma)$ фиксируется соответствующая концевая точка разветвления (трансцендентная или алгебраическая).

Поэтому оценки сверху величин $C(r, \Gamma)$ являются в то же время оценками трансцендентной и алгебраической разветвленности римановой поверхности над Г.

Из теоремы 2 вытекает следствие аналогичное соотношению дефектов.

Следствие. *Пусть $w(z)$ мероморфная в $|z| < \infty$ функция $M(\Gamma)$ — некоторое множество ограниченных гладких жордановых кривых Г в w — плоскости, таких, что каждая точка в w — плоскости или принадлежит некоторой кривой Г, или является граничной для не более, чем двух кривых Г*), c — действительное число $(c > 1)$. Тогда для произвольного набора кривых $\Gamma_\nu \subset M(\Gamma)$ выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu} d(\Gamma_\nu) \leqslant K_2 < \infty \tag{3}$$

где

$$d(\Gamma) = \lim_{r \to \infty} \frac{C(r, \Gamma)}{T(cr)} \tag{4}$$

откуда получаем, что исключая, быть может, счетное множество отрезков $\Gamma_\nu \subset M(\Gamma)$, для всех остальных $\Gamma \subset M(\Gamma)$

$$d(\Gamma) = 0. \tag{5}$$

В силу вышесказанного выражение $d(\Gamma)$ можно рассматривать как суммарную разветвленность римановой поверхности над Г, откуда тривиальным образом можно выделить трансцендентную и алгебраическую разветвленность. Отметим, что $d(\Gamma)$ — есть также оценка сверху трансцендентной и алгебраической разветвленности над произвольной точкой $a \in \Gamma$.

Пусть теперь $\Phi(r, \Gamma)$ — количество точек $re^{i\varphi}$ на окружности $|z| = r$, таких, что $w(re^{i\varphi}) \in \Gamma$.

Величины $C(r, \Gamma)$ и $\Phi(r, \Gamma)$ связаны следующим соотношением

$$C(r, \Gamma) \leqslant \Phi(r, \Gamma) + 2n_1(r, \Gamma),$$

где $n_1(r, \Gamma)$ — сумма кратностей кратных точек из круга $|z| \leqslant r$, образы которых лежат на Г.

---

* Примером $M(\Gamma)$ может служить множество концентрических окружностей или множество параллельных отрезков, покрывающих плоскость

Теорема 3. *Пусть $w(z)$ мероморфная в $|z|<\infty$, функция нижнего порядка $\lambda<\infty$ Γ_ν, $(\nu=1, 2 \ldots g)$ — конечный набор не имеющих общих точек, ограниченных гладких жордановых кривых в w — плоскости. Тогда существует постоянная $K=K(\lambda)<\infty$ такая, что на некотором неограниченном множестве значений r выполняется*

$$\sum_{\nu=1}^{g} \Phi(r, \Gamma_\nu) \leqslant K(\lambda) T(r).$$

Теоремы 1—3 находятся в сложных качественных и количественных связях с выводами теории распределения Р. Неванлинна. Здесь мы ограничимся указанием на то, что несмотря на разницу в подходах, удается проследить связи между ними и можно показать, что теорема 2 содержит в себе утверждение, аналогичное одной из эквивалентных (в смысле описания соотношений разветвленности) записей второй основной теоремы теории поверхностей наложения Л. Альфорса, которая в свою очередь является аналогом второй основной теоремы Р. Неванлинна.

В заключение выражаю благодарность Н. У. Аракеляну и А. А. Гончару за ценные обсуждения результатов.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Դ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

Երկրաչափական մոտեցում ռիմանյան մակերևույթների ճյուղավորման պրոբլեմին

Հոդվածում ուսումնասիրվում են մերոմորֆ ֆունկցիաներին համապատասխանող ռիմանյան մակերևույթների եզակիությունները։ Ժամանակին Ռ. Նևանլիննան իր մտցրած դեֆեկտները դիտարկում էր որպես տրանսցենդենտ եզակիությունների բնութագրիչ։ Ինչպես պարզվեց հետագայում, անմիջական կապ դեֆեկտների և տրանսցենդենտ կետերի միջև չկա։ Տվյալ աշխատանքում տրվում է այդ եզակիությունների նկարագրությունը, որը ի տարբերություն Ռ. Նևանլիննայի մոտեցմանը, հիմնվում է տրանսցենդենտ կետերի և ասիմպտոտիկ գծերի միջև եղած անմիջական կապի վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Неванлинна*, Однозначные аналитические функции, ОНТИ, 1941. [2] *R. Nevanlinna*, Abhandlung aus dem Mathematische Seminar der Hamburgshen Universitet, B. 8, №4, 351—400 (1930). [3] *Г. А. Барсегян*, „Известия АН Арм. ССР", сер. матем., т. XII, №1 (1977). [4] *А. А. Гольдберг*, Математический анализ, т. 10 (1973).