ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXV 1977 4

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Л. А. Асланян, В. М. Караханян

Общее описание решений дискретной изопериметрической задачи

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 23/VII 1977)

Данная работа является непосредственным продолжением ([1]). В ней проводится исследование множества всех решений дискретного аналога классической изопериметрической задачи, рассмотренного в ([1]). Множество всех решений дискретной изопериметрической задачи при фиксированной мощности, в отличие от случая классической постановки задачи ([2]), обладает большим разнообразием. Причины этого были указаны в ([1]), где также был рассмотрен специальный частный случай, когда эти решения оказываются единственными.

Для описания множества решений дискретной изопериметрической задачи мы будем рассматривать разбиения этих решений, их количественные и качественные характеристики. На этой основе мы получим также общие критерии, присущие всем решениям задачи.

Введем несколько определений. Назовем подмножество $A\subseteq E^n$ критическим (по компактности), если после удаления произвольной его вершины α число внутренних точек образованного подмножества $A\setminus\alpha$ строго убывает.

Замечание 1. *Если стандартное размещение L_a^n –критическое множество, то каждое оптимальное подмножество мощности a тоже критическое множество.*

Подобные мощности в дальнейшем мы будем называть критическими мощностями. Как мы увидим, свойства множества всех решений дискретной изопериметрической задачи существенно меняются при переходе от критических мощностей к не критическим.

Прежде всего отметим следующее обобщение леммы 3 ([1]), которым мы будем пользоваться ниже.

Лемма 1. *Рассмотрим произвольные стандартные размещения A и B мощностей a и b соответственно. Если $a\geqslant b$,*

$$a=\sum_{i=0}^{k} C_n^i+\delta_1,\quad 0\leqslant\delta_1<C_n^{k+1},\quad b=\sum_{i=0}^{r} C_n^i+\delta_2,\quad 0\leqslant\delta_2<C_n^{r+1},$$

A_0 и B_0 новые стандартные размещения, для которых

1) $|A_0|=\sum_{i=0}^{k} C_n^i+\delta_1+\delta_2$ и $|B_0|=\sum_{i=0}^{r} C_n^i$ при $\delta_1+\delta_2\leqslant C_n^{k+1}$, и

2) $|A_0|=\sum_{i=0}^{k+1} C_n^i$ и $|B_0|=\sum_{i=0}^{r} C_n^i+(\delta_1+\delta_2-C_n^{k+1})$ при $\delta_1+\delta_2>C_n^{k+1}$,

и $|A_0|$ является критической мощностью, то

$$|\Gamma(A_0)|+|\Gamma(B_0)|<|\Gamma(A)|+|\Gamma(B)|.$$

Если $A\subseteq E^n$ произвольное подмножество, то скажем, что оно приведенное, если для произвольного i, $1\leqslant i\leqslant n$, $|A^0(i)|\geqslant|A^1(i)|$. При рассмотрении интересующих нас количественных характеристик подмножеств E^n мы всегда можем предполагать, что эти подмножества приведенные.

Теорема 1. *Если A произвольное оптимальные и приведенное подмножество E^n, то для каждого i, $1\leqslant i\leqslant n$ при $|A|<2^n-1$ справедливо*

а) *если $P(|A^0(i)|)<|A^1(i)|$, то $\Gamma(A)=\Gamma(A^0(i))\cup\Gamma(A^1(i))$, причем $A^0(i)$ и $A^1(i)$ оптимальны соответственно в $E_0^n(i)$ и $E_1^n(i)$,*

$$\pi_i(P(A^0(i)))\subseteq A^1(i),\quad \pi_i(P(A^1(i)))\subset A^0(i)\quad и\quad |P(A^0(i))|<|A^1(i)|,$$

в) *если $P(|A^0(i)|)>|A^1(i)|$, то $\Gamma(A)=(A^0(i)\setminus\pi_i(A^1(i)))\cup\Gamma(A^1(i))$, причем $A^1(i)$ оптимально в $E_1^n(i)$, $\pi_i(P(A^0(i)))\supseteq A^1(i)$, $|P(A^0(i))|\geqslant\geqslant|A^1(i)|$, или*

с) *если $P(|A^0(i)|)=|A^1(i)|$, то $\Gamma(A)=\Gamma(A^0(i))\cup\Gamma(A^1(i))==(A^0(i)\setminus\pi_i(A^1(i)))\cup\Gamma(A^1(i))$, причем $A^0(i)$ и $A^1(i)$ оптимальные подмножества $E_0^n(i)$ и $E_1^n(i)$, $\pi_i(P(A^0(i)))=A^1(i)$, $|P(A^0(i))|=|A^1(i)|$, где π_i—оператор проектирования по направлению x_i.*

Замечание 2. *Если подмножество $A\subseteq E^n$ оптимально, и $|\Gamma(A)|=|\Gamma(A^1(i)|+|A^0(i)|-|A^1(i)|$, то множество $A^0(i)$ может не быть оптимальным в подкубе $E_0^n(i)$.*

Следствие 1. *Если для оптимального подмножества $A\subseteq E^n$ и переменных x_i и x_j, $1\leqslant i,\ j\leqslant n$, справедливы соотношения $|\Gamma(A)|=|\Gamma(A^1(i))|+|A^0(i)|-|A^1(i)|$ и $|\Gamma(A)|=|\Gamma(A^1(j))|+|A^0(j)|-|A^1(j)|$, то $|A^0(i)|=|A^0(j)|$ и $|\Gamma(A^1(i))|=|\Gamma(A^1(j))|$.*

Теорема 2. *Для произвольного оптимального подмножества $A\subseteq E^n$ либо существует такая координата x_i, $1\leqslant i\leqslant n$, что для разбиения $A=A^0(i)\cup A^1(i)$ справедливо соотношение $|\Gamma(A)|=|\Gamma(A^0(i))|+|\Gamma(A^1(i))|$, либо $A=S_{n-1}^n(\alpha)$, $\alpha\in E^n$.*

Доказательство этого утверждения довольно простое. Действительно, предположим что существует такое оптимальное подмножество $A\subseteq E^n$, для которого для всех x_i, $i=1, 2, \ldots, n$

$$|\Gamma(A)|=|\Gamma(A^1(i))|+|A^0(i)|-|A^1(i)|,\ |P(A^0(i))|>|A^1(i)|.$$

Докажем, что в этих условиях множество A представляет собой множество нулей некоторой монотонной булевой функции в E^n. Подмножество $A\subseteq E^n$ предположим приведенным.

Пусть $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\in E^n$, $|\alpha|=r$, и $i_1, i_2, \ldots, i_r$—все те номера, для которых $\alpha_{i_j}=1$. Тогда ясно, что если $\alpha\in A$, то $\alpha\in A^1(i_j)$

и $\pi_{i_j}(\alpha) \in P(A^0(i_j))$ при $j=1, 2, \ldots, r$. Для любого набора $\beta < \alpha$, $\beta \neq \alpha$ существует хотя бы одна такая координата x_{i_j}, для которой $\beta < \pi_{i_j}(\alpha) \in A$. При этом ясно, что $|\pi_{i_j}(\alpha)| < |\alpha|$, и поэтому через несколько шагов подобных рассуждений мы приходим к заключению $\beta \in A$.

Далее докажем, что для некоторого $k, 0 \leqslant k \leqslant n$, $A = S_k^n(0)$. Для этого достаточно рассмотреть произвольную точку $\alpha \in A$ и воспользоваться тем, что точки $\pi_{i_j}(\alpha)$ являются внутренними точками подмножеств $A^0(i_j)$, $j=1, 2, \ldots, r$.

Остается добавить, что для полученных подмножеств всегда имеет место случай с) теоремы 1, что противоречит нашим предположениям, или же, что $A = S_{n-1}^n(0)$.

Таким образом, в этом пункте мы получили довольно полное описание качественных особенностей разбиений оптимальных подмножеств E^n.

Основной количественной характеристикой решений дискретной изопериметрической задачи является функция $\Gamma(a)$, рассмотренная в ([1]). Однако подобная характеристика описывает решения с весьма общей точки зрения, в связи с чем возникает интерес к другим, более конкретным характеристикам количественного плана.

Для произвольного подмножества $A \subseteq E^n$ разбиение по координате x_i назовем минимальным, если $|A^0(i)| - |A^1(i)| \leqslant |A^0(j)| - |A^1(j)|$ для $j=1, 2, \ldots, n$, и максимальным, если $|A^0(i)| - |A^1(i)| \geqslant |A^0(j)| - |A^1(j)|$ при $j=1, 2, \ldots, n$. Мощности $|A^0(i)|$ и $|A^1(i)|$ при минимальном и максимальном разбиениях обозначим соответственно через b_0, a_0 и b_1, a_1.

Согласно определению стандартного размещения L_a^n мощности a, $a = \sum_{l=0}^{k} C_n^l + \delta$, $\delta < C_n^{k+1}$ легко получить, что $a_0 = \sum_{l=0}^{k-1} C_{n-1}^l + \delta$ и $b_0 = \sum_{l=0}^{k} C_{n-1}^l$ при $\delta \leqslant C_{n-1}^k$, и что $a_0 = \sum_{l=0}^{k} C_{n-1}^l$ и $b_0 = \sum_{l=0}^{k-1} C_{n-1}^l + \delta$, когда $\delta > C_{n-1}^k$.

Легко убедиться также, что $a_1 = \sum_{l=0}^{k-1} C_{n-1}^l + \sum_{s=0}^{r} C_{n-m_s-1}^{k-m_s+s-1}$, и $b_1 = \sum_{l=0}^{k} C_{n-1}^l + \sum_{s=0}^{r} C_{n-m_s-1}^{k-m_s+s}$, где числа m_s, $s=1, 2, \ldots, r$ были введены в ([1]) как элементы разложения числа δ в виде $\delta = \sum_{s=0}^{r} C_{n-m_s}^{k-m_s+s}$.

Теорема 3. *Для произвольного оптимального подмножества $A \subseteq E^n$ мощности a и каждого номера i, $1 \leqslant i \leqslant n$*

$$\min(|A^0(i)|, |A^1(i)|) \geqslant a_1 = \sum_{l=0}^{k-1} C_{n-1}^l + \delta_1.$$

Действительно, исходя из имеющихся формул легко убедиться, что $p_k(\delta) \geqslant \delta_1$, откуда следует, что для максимального разбиения стандартного размещения L^n_a имеет место соотношение $P(b_1)\geq a_1$, что соответствует случаям в) или с) теоремы 1. Отсюда, согласно следствию 1 получаем утверждение теоремы.

Полученный результат удачно дополняется следующим.

Теорема 4. *Для произвольного оптимального подмножества $A\subseteq E^n$ критической мощности* (1) *и для каждого номера i, $1\leq i\leq n$,*

$$\min(|A^0(i)|,\ |A^1(i)|)\leq a_0=\sum_{i=0}^{k} C^i_{n-1}-(C^k_{n-1}-\delta).$$

Результаты предыдущих пунктов позволяют также дать некоторую общую характеристику оптимальных размещений подмножеств E^n. Одно из утверждений этого типа было сформулировано в ([1]).

Теорема 5. *Если $A=A^0(i)\cup A^1(i)$ произвольное минимальное разбиение оптимального подмножества $A\subseteq E^n$ критической мощности* ([1]), *то $|A^1(i)|=a_0$ и $|A^0(i)|=b_0$.*

Согласно этой теореме для критических мощностей при минимальном разбиении $A=A^0(i)\cup A^1(i)$ достигаются соответствующие мощности стандартного размещения. С другой стороны, одно из чисел a_0 и b_0 в точности соответствует некоторому шару в E^{n-1}. Согласно теореме 7 $A^0(i)$ и $A^1(i)$ оптимальные подмножества в E^{n-1}, откуда следует, что одно из множеств $A^0(i)$ и $A^1(i)$ является шаром, а другое множество оптимальное размещение критической мощности в E^{n-1}. Таким образом, приведенные рассуждения указывают на индуктивный способ, описывающий все оптимальные размещения критических мощностей.

Следствие 3. *Для оптимальности подмножества $A\subseteq E^n$ критической мощности, для которого $S^n_k(a)\subseteq A\subseteq S^n_{k+1}(a)$ необходимо и достаточно, чтобы оно представляло собой некоторое стандартное размещение.*

Теорема 6. *Для произвольного оптимального подмножества $A\subseteq E^n$ критической мощности* (1) *существует такая точка $a\in E^n$, что $S^n_k(a)\subseteq A\subset S^n_{k+2}(a)$.*

Результаты, изложенные выше находят приложение в решении различных задач дискретной математики. Укажем одно из таких приложений.

Теорема 7. *Для произвольного δ, $0<\delta<C^{k+1}_n|H(A)|$, $A\subseteq E^n_{k+1}$, минимально тогда и только тогда, когда $A=L^n_\delta(k+1)$.*

В этой теореме формулируются необходимые и достаточные условия для „плотной упакованности" специальных систем подмножеств конечного множества, что представляет собой обобщение известной теоремы Краскаля-Катоны ([3]).

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Լ. Հ. ԱՍԼԱՆՅԱՆ, Վ. Մ. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

Դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծումների ընդհանուր նկարագիրը

Ներկա աշխատանքը հանդիսանում է ([1])-ի անմիջական շարունակությունը։ Նրանում դիտարկվում են n-չափանի միավոր խորանարդի գագաթների բազմության վրա իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծումների տրոհումները։ Ուսումնասիրվում են նրանց քանակական և որակական օրինաչափությունները։ Առանձնացվում են հատուկ տիպի հզորություններ, որոնց համար բերվում է խնդրի բոլոր լուծումների լրիվ նկարագիրը։ Աշխատանքի վերջում նշվում է մի կարևոր կիրառություն, որը վերաբերվում է վերջավոր բազմության ենթաբազմությունների հատուկ ընտանիքների ասեղմ դասավորման խնդիրներին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Асланян.* Дискретные изопериметрические задачи. Тезисы IV Всесоюзной конференции по теоретической кибернетике, г. Новосибирск, 1977. [2] *В. Бляшке.* Круг и шар. М., 1967. [3] *П. Эрдеж, Дж. Спенсер.* Вероятностные методы в комбинаторике (дополнение), М., 1976.