ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXV 1977 4

УДК 517.52

МАТЕМАТИКА

Л. Х. Меграбян

О мультипликативных представлениях некоторых классов регулярных функций в полуплоскости

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 8/VII 1977)

1. В монографии [1] М. М. Джрбашяном были введены в рассмотрение классы N_α $(-1<\alpha<\infty)$ мероморфных функций $F(z)$ $(|z|<1)$, являющихся существенным обобщением класса Неванлинны. Как выяснилось позже, эти классы играют важную роль, также, в приложениях [2,3].

В предыдущей работе [4] автора были получены произведения типа Бляшке для элементарных множителей в верхней полуплоскости, нормированных в бесконечности специальным образом. Эти произведения являются аналогами произведений $B_\alpha(z; z_k)$, играющих важную роль в теории классов N_α.

В настоящей заметке приводятся мультипликативные представления некоторых классов, регулярных в полуплоскости функций, аналогичных тем, которые были получены М. М. Джрбашяном в развитой им теории факторизации мероморфных функций в единичном круге [1,5].

2. Пусть α—фиксированное положительное число, $\mathfrak{M}_\alpha$ — класс, вообще говоря, комплекснозначных функций $f(y)$ $(0<y<\infty)$ таких, что $\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}f(t+y)dt<\infty$ для почти всех y. Оператор Вейля $D^{-\alpha}$ на множестве $\mathfrak{M}_\alpha$ определяется соотношением*

$$D^{-\alpha}f(y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}f(t+y)dt. \tag{1}$$

Из определения оператора $D^{-\alpha}$ следует, что, если при некотором $\alpha(\alpha>0)$, $f\in\mathfrak{M}_\alpha$, то почти всюду на $(0,\infty)$

$$\lim_{\alpha\to+0}D^{-\alpha}f(y)=f(y).$$

* В [4] рассматривался оператор $(-1)^\alpha D^{-\alpha}$. По этой причине и вызваны несущественные отличия.

Поэтому естественно определение оператора $D^{-\alpha}$ распространить и на значение $\alpha=0$, положив

$$D^0 f(y)=f(y), \tag{2}$$

Впредь полагаем, что $\Pi^+=\{\lambda:\operatorname{Im}\lambda>0\}$, $\Pi_y^+=\{\lambda:\operatorname{Im}\lambda>y\}$, $\overline{\Pi}_y^+=\{\lambda:\operatorname{Im}\lambda\geqslant y\}$, p—фиксированное, целое, неотрицательное число. Под $f(\lambda)\in\mathfrak{M}_p$ мы понимаем функцию $f(x+iy)$, которая, как функция от y принадлежит множеству $\mathfrak{M}_p$. $D^{-p}f(\lambda)$ означает, что оператор D^{-p} действует по переменной y ($\lambda=x+iy$).

Лемма 1. *Пусть функция $f(\lambda)$ регулярна в Π^+ и принадлежит множеству $\mathfrak{M}_p$. Тогда функция*

$$f_p(\lambda)=D^{-p}f(\lambda) \tag{3}$$

также регулярна в Π^+.

Пользуясь леммой 1 можно доказать следующее утверждение

Лемма 2. *Пусть $f(\lambda)$ регулярна в Π^+ и $u(\lambda)=\operatorname{Re}f(\lambda)$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_p$. Если $u_p(x)$ непрерывна на $(-\infty,\infty)$, и $(x^2+1)^{-1}u_p(x)\in L(-\infty,\infty)$, то для любого $\lambda\in\Pi^+$ справедливы соотношения*

$$\text{a)}\qquad u(x+iy)=\frac{(-1)^p}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_p(\tau)\left[\frac{y}{(\tau-x)^2+y^2}\right]_y^{(p)}d\tau \tag{4}$$

$$\text{b)}\quad f(\lambda)=ic+\frac{(-i)^p p!}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}u_p(\tau)s_p(\tau;\lambda)d\tau \tag{5}$$

где c — вещественная постоянная, а

$$s_p(\tau;\lambda)=\frac{1}{(\tau-\lambda)^{p+1}}-\left(\frac{\tau}{\tau^2+1}\right)^{(p)}_{\operatorname{Im}\lambda}. \tag{*}$$

При $p=0$ формулы (4), (5), согласно (2), превращаются в известные формулы Пуассона, Шварца для случая полуплоскости.

3. В [4] было показано, что функция

$$a_p(\lambda;\zeta)=\frac{\lambda-\zeta}{\lambda-\overline{\zeta}}\exp\left\{\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{\lambda-\overline{\zeta}}\right)^k-\frac{(-i)^p p!}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}u_p(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-\lambda)^{p+1}}\right\}=$$

$$=\frac{\lambda-\zeta}{\lambda-\overline{\zeta}}\left(\frac{\lambda-\operatorname{Re}\zeta}{\lambda-\overline{\zeta}}\right)^{2(\delta_p-1)}\exp\left\{\sum_{k=1}^{p/2}\frac{2}{2k-\delta_p}\left(\frac{i\operatorname{Im}\zeta}{\lambda-\operatorname{Re}\zeta}\right)^{2k-\delta_p}\right\}, \tag{6}$$

где $\delta_p=2^{-1}[1+(-1)^p]$, $\lambda\in\Pi^+$, $\zeta\in\Pi^+$,

$$u_p(\lambda)=\operatorname{Re}D^{-p}\left\{\log\frac{\lambda-\zeta}{\lambda-\overline{\zeta}}+\sum_{1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{\lambda-\overline{\zeta}}\right)^k\right\}$$

является решением следующей задачи:

Найти такую регулярную в Π^+ функцию

$$a_p(\lambda; \zeta) = \frac{\lambda - \zeta}{\lambda - \bar{\zeta}} \exp\{-w_p(\lambda; \zeta)\} \tag{7}$$

для которой выполняются условия

a) $\log a_p(\lambda; \zeta) \in \mathfrak{M}_p$.

b) $\lim\limits_{\operatorname{Im}\lambda \to 0} D^{-p} \log |a_p(\lambda; \zeta)| = 0$.

Функция $a_p(\lambda; \zeta)$ $(p = 0, 1, \ldots)$ (6) является естественным обобщением фактора Бляшке $\frac{\lambda - \zeta}{\lambda - \bar{\zeta}}$ в полуплоскости Π^+. В заметке [4], в частности, была доказана следующая теорема о сходимости произведения

$$b_p(\lambda, \lambda_k) = \prod_{k=1}^{\infty} a_p(\lambda; \lambda_k). \tag{8}$$

Пусть $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ — *последовательность комплексных чисел в* Π^+, *удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im} \lambda_k)^{p+1} < \infty. \tag{9}$$

Тогда бесконечное произведение (8) *равномерно и абсолютно сходится в каждом замкнутом множестве* $\bar{\Pi}_y^+ (0 < y < \infty)$ *и определяет функцию, регулярную в* Π^+, *обращающуюся в нуль лишь в точках* λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$. *Если произведение* (8) *сходится в* Π^+, *то последовательность* $\{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условию* (9).

Справедливы, также, следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть бесконечное произведение* $b_p(\lambda; \lambda_k)$ *сходится в* Π^+. *Тогда функция*

$$V_p(\lambda; \lambda_k) = D^{-p} \log |b_p(\lambda; \lambda_k)| \tag{10}$$

является субгармонической в верхней полуплоскости и для любого $\lambda \in \Pi^+$ *справедливо неравенство*

$$V_p(\lambda; \lambda_k) \leqslant 0. \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{\lambda_k\}_1^{\infty} \subset \Pi^+$ *и удовлетворяет условию* (9)

$$\sum_1^{\infty} (\operatorname{Im} \lambda_k)^{p+1} < \infty.$$

Тогда для любого $y (0 < y < \infty)$ *верно соотношение*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V_p(x + iy; \lambda_k)| dx < K_p, \tag{12}$$

где K_p — *независящая от* y *константа*.

Теорема 3. *Пусть* $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Pi^+$ *и удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im} \lambda_k)^p < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{y\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} V_p(x+iy; \lambda_k)\,dx = 0. \tag{13}$$

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 3 для почти всех* $x(-\infty<x<\infty)$ *имеет место равенство*

$$\lim_{y\to 0} V_p(x+iy; \lambda_k) = 0.$$

4. Пусть функция $F(\lambda)$ мероморфна в верхней полуплоскости. При помощи леммы 2 доказывается следующая теорема о представлении $F(\lambda)$ в $\Pi^+_{y_0}$ через значения функции на границе $x+iy_0$ $(-\infty<x<\infty)$.

Теорема 4. *Пусть* $F(\lambda)$*—мероморфная в* Π^+ *функция и* $\{a_\nu\}$, $\{b_\nu\}$*—соответственно последовательности ее нулей и полюсов с учетом их кратности, причем бесконечно удаленная точка не является точкой сгущений ни для нулей, ни для полюсов. Если* $\log|F(\lambda)|$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{M}_p$ *и для некоторого* y_0 $(0<y_0<\infty)$ *функция* $D^{-p}\log|F(x+iy_0)|$ *интегрируема с весом* $(x^2+1)^{-1}$ $(-\infty<x<\infty)$, *тогда для любого* $\lambda\in\Pi_{y_0}$ *справедлива следующая формула*

$$\log F(\lambda) = \sum_{\operatorname{Im} a_\nu > y_0} \log a_p(\lambda - iy_0; a_\nu - iy_0) - \sum_{\operatorname{Im} b_\nu > y_0} \log a_p(\lambda - iy_0; b_\nu - iy_0) +$$

$$+\frac{(-i)^p p!}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} s_p(\tau+iy_0; \lambda)\, D^{-p}\log|F(\tau+iy_0)|\,d\tau + ic \tag{14}$$

где $a_p(\lambda; z)$ *выражается формулой* (6), $s_p(\tau; \lambda)$*—формулой* (*), c*—вещественная константа.*

5. Перейдем к определению классов функций, регулярных в верхней полуплоскости.

Определение 1. Пусть $f(\lambda)$ есть регулярная в Π^+ функция, нули которой не сгущаются в бесконечности. Условимся говорить, что $f(\lambda)$ принадлежит классу R_p $(p=0, 1, \ldots)$ если $\log|f(\lambda)|$ входит в область определения оператора D^{-p} и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |D^{-p}\log|f(x+iy)||\,dx < K_p < \infty, \quad (y>0) \tag{15}$$

где K_p—независящая от y константа.

В частном случае $p=0$, класс R_0 определяется как множество функций $f(\lambda)$, регулярных в Π^+, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \log |f(x+iy)| \right| dx \leqslant K < \infty, \quad (y>0) \tag{15'}$$

где K не зависит от y. Этот класс впервые был введен В. И. Крыловым* и им же было получено его мультипликативное представление.

Теорему 2 можно перефразировать следующим образом.

Теорема 2'. *Если последовательность* $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Pi^+$ *и*

$$\sum_1^\infty (\operatorname{Im} \lambda_k)^{p+1} < \infty, \tag{9}$$

тогда бесконечное произведение $b_p(\lambda; \lambda_k)$ (8) *принадлежит классу* R_p.

Верно и обратное утверждение. Точнее справедлива следующая

Лемма 4. *Пусть* $f \in R_p$ *и* $\{\lambda_k\}$*—последовательность ее нулей. Тогда эта последовательность удовлетворяет условию*

$$\sum_k (\operatorname{Im} \lambda_k)^{p+1} < \infty. \tag{9'}$$

Доказательство основано на применении теоремы 4.

Перейдем к мультипликативному представлению функций класса R_p. Имеет место следующая

Теорема 5. *Для того, чтобы функция* $f(\lambda)$ *принадлежала классу* R_p $(p=0, 1, \ldots)$ *необходимо и достаточно, чтобы она допускала в верхней полуплоскости представление*

$$f(\lambda) = c\, b_p(\lambda; \lambda_k) \exp\left\{ \frac{(-i)^p}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} s_p(\tau; \lambda)\, d\psi(\tau) \right\}, \tag{16}$$

где $|c|=1$; $\{\lambda_k\}$*—последовательность чисел из верхней полуплоскости удовлетворяющая условию* (9'); $b_p(\lambda; \lambda_k)$*—произведение типа Бляшке-Джрбашяна*

$$b_p(\lambda; \lambda_k) = \prod_k a_p(\lambda; \lambda_k),$$

$$a_p(\lambda; \zeta) = \frac{\lambda - \zeta}{\bar\zeta - \lambda} \left(\frac{\lambda - \operatorname{Re}\zeta}{\lambda - \bar\zeta} \right)^{2(\delta_p - 1)} \exp\left\{ \sum_{k=1}^{[p/2]} \frac{2}{2k - \delta_p} \left(\frac{i \operatorname{Im}\zeta}{\lambda - \operatorname{Re}\zeta} \right)^{2k - \delta_p} \right\},$$

$$\left(\delta_p = \frac{1+(-1)^p}{2} \right),$$

функция $s_p(\tau; \lambda)$ *определяется формулой*

---

* См. ([6]), стр. 134. Там этот класс был обозначен через R_M

$$s_p(\tau;\lambda) = \frac{1}{(\tau-\lambda)^{p+1}} - \left(\frac{\tau}{\tau^2+1}\right)^{(p)}_{\operatorname{Im}\lambda}, \tag{*}$$

а $\rho(\tau)$ — *вещественная функция ограниченного изменения* $(-\infty<\tau<\infty)$.

В случае $p=0$ класс R_0 совпадает с множеством функций $f(\lambda)$ представимых в Π^+ в виде

$$f(\lambda) = cb(\lambda;\lambda_k)\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\tau\lambda}{\tau-\lambda}\,\frac{d\varphi(\tau)}{\tau^2+1}\right\}, \tag{16'}$$

где $|c|=1$

$$b(\lambda;\lambda_k) = \prod_k \frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda-\bar{\lambda}_k}$$

произведение Бляшке, $\varphi(\tau)$ — вещественная функция, ограниченного изменения на $(-\infty,\infty)$.

Представление (16′) было получено В. И. Крыловым [6].

Определение 2. Скажем, что $f(\lambda)\in \mathrm{H}_p$ $(p=1,2,\ldots)$, если $f(\lambda)$ регулярна в полуплоскости Π^+ и удовлетворяет условиям: $u(\lambda) = \operatorname{Re} f(\lambda)\in\mathfrak{M}_p$

$$u_p(\lambda)\geq 0 \quad (\lambda\in\Pi^+),$$

где $u_p(\lambda) = D^{-p}u(\lambda)$.

В случае $p=0$, класс H_0 совпадает с классом Герглотца H регулярных в Π^+ функций с неотрицательной реальной частью (см. [7,8]). По теореме Герглотца [7,8] этот класс совпадает с множеством функций, представимых в Π^+ в виде

$$f(\lambda) = ic + iq\lambda + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\tau\lambda}{\tau-\lambda}\,\frac{d\psi(\tau)}{\tau^2+1}, \tag{17}$$

где $\operatorname{Im} c=0$, $q\geq 0$, $\psi(\tau)$ — неубывающая на $(-\infty,\infty)$ функция с конечным интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(\tau)}{\tau^2+1}<\infty. \tag{18}$$

Теорема 6. *Класс* H_p $(p=1,2,\ldots)$ *совпадает с множеством функций* $f(x)$, *представимых в полуплоскости* Π^+ *в виде*

$$f(\lambda) = ic + \frac{(-i)^p}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(\tau)}{(\tau-\lambda)^{p+1}}, \tag{19}$$

где $\operatorname{Im} c=0$, $\psi(\tau)$ *неубывающая на* $(-\infty,\infty)$ *функция с конечным интегралом* (18).

Приношу глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну и М. С. Лившицу за постановку задачи и обсуждения.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Լ. Խ. ՄԵՀՐԱԲՅԱՆ

Կիսահարթությունում որոշ ռեգուլյար ֆունկցիաների դասերի մուլտիպլիկատիվ ներկայացման մասին

Հոդվածում դիտարկվում է կիսահարթությունում ռեգուլյար ֆունկցիաների դասեր, որոնք կախված են դիսկրետ պարամետրից։ Այդ դասերը հանդիսանում են Հերգլոտցի և Կռիլովի հայտնի դասերի ընդհանրացում։

Ստացված են այդ դասերի մուլտիպլիկատիվ ներկայացումները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966. [2] *М. С. Лившиц*, ДАН СССР, т. 219, № 4, (1974). [3] *Л. Х. Меграбян*, «Известия АН Арм ССР», сер. матем., № 5, 369—389 (1976). [4] *Л. Х. Меграбян*, ДАН Арм ССР, т. 63, № 2 (1976). [5] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 157, № 5 (1964). [6] *В. И. Крылов*, Мат. сб., 6 (48), № 1, 95—138, 1939. [7] *Н. И. Ахиезер*, Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею, „Физматгиз“, М., 1961. [8] *L. de Branges*, Hilbert spaces of entire functions, Ins Englewood Cliffs, N. J. (1968).