ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXV 1977 4

УДК 519

МАТЕМАТИКА

С. С. Агаян, А. Г. Саруханян

# К построению матриц Адамара

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 23/VI 1977)

Матрицей Адамара $H$ порядка $m$ называется квадратная матрица, элементы которой суть $+1$ и $-1$ и для которой справедливо равенство

$$HH^T=H^TH=nJ, \tag{1}$$

где $H^T$—транспонированная матрица $H$, а $J$—единичная матрица порядка $n$.

Известно, что если $H$—матрица Адамара порядка $m$, $m>2$, то $m\equiv 0 \pmod 4$. Обратная задача, а именно: задача построения матриц Адамара всех порядков $m$, виоа $m\equiv 0 \pmod 4$, или доказательство их несуществования остается пока открытой.

Матрицы Адамара привлекли к себе внимание еще с 1867 г., но их прикладное значение (в теории кодирования, в комбинаторике, в теории графов и в численном анализе) было выявлено сравнительно недавно, в 50—60 годах, что явилось дополнительным стимулом, вызвавшим дальнейшие исследования, посвященные вопросам существования и построения матриц Адамара.

Существуют много методов по построению матриц Адамара разных порядков. Один из этих методов, получивший дальнейшее развитие, принадлежит Вильямсону.

Теорема Вильямсона. *Пусть существуют 4 симметрические попарно коммутативные* $(+1, -1)$ *матрицы порядка* $m$ *удовлетворяющие условию*

$$A^2+B^2+D^2+C^2=4mI_m.$$

*Тогда массив Вильямсона является матрицей Адамара порядка* $4m$.

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ -C & D & A & -B \\ -D & -C & B & A \end{pmatrix} \tag{2}$$

Полученная матрица называется матрицей Адамара типа Вильямсона.

Последние достижения в построении матриц Адамара связаны во-первых, с построением массивов Геталс—Зейделя и Бомер—Холла ([2–7]) являющимися обобщением по разным направлениям массива Вильямсона и во-вторых, с четырьмя матрицами $A$, $B$, $C$, $D$ порядка ([2–5]), удовлетворяющими следующим условиям:

$$\text{а)}\quad MN^T = NM^T \qquad M, N \in \{A, B, C, D\} \tag{3}$$

$$\text{б)}\quad AA^T + BB^T + CC^T + DD^T = 4mI_m \tag{4}$$

Матрицы $A$, $B$, $C$, $D$ с отмеченными условиями называются матрицами типа Вильямсона. Самим Вильямсоном было предложено рассматривать случай, когда матрицы $A$, $B$, $C$, $D$ симметрические и циркулянтные, тогда (3) автоматически выполняется, а (4) сводится к

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 4mI_m.$$

Используемые понятия, терминология и обозначения касающиеся массивов Вильямсона, Геталс-Зейделя и Бомер-Холла, а также определение матрицы $U$ взяты из работы ([2]).

Известные теоремы.

Теорема (*Геталс—Зейделя*). *Пусть $A$, $B$, $C$, $D$, циклические матрицы порядка $m$ удовлетворяющие условию* (4), *тогда массив Геталс-Зейделя является матрицей Адамара порядка $4m$.*

Теорема (*Бомер-Холла*). *Пусть $A$, $B$, $C$, $D$ матрицы типа Вильямсона порядка $m$, и пусть существует массив Бомер-Холла порядка $4n$. Тогда существует матрица Адамара порядка $4mn$.*

В настоящей работе найдено необходимое и достаточное условие существования матриц Адамара типа Вильямсона, введены новые массивы, введено понятие обобщенных матриц типа Вильямсона. Найдено необходимое и достаточное условие обобщенных матриц Вильямсона. Доказана теорема, откуда в частности вытекают теоремы Геталс-Зейделя и Бомер-Холла.

Теорема 1. *Для того, чтобы существовала матрица Адамара типа Вильямсона порядка $4n$ состоящая из циркулянтных симметрических матриц $A$, $B$, $C$, $D$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

1. $a_i = a_{n-i}, \quad b_i = b_{n-i}, \quad c_i = c_{n-i}, \quad d_i = d_{n-i} \quad i = 1, 2 \ldots n-1$
2. $|a_i| = |b_i| = |c_i| = |d_i| = 1 \qquad i = 0, 1, \ldots n-1$

а) *для нечетных $n$ справедливо*

$$\sum_{\substack{i \neq j,\ i \neq n-j \\ i+j=k,\ i+j=n+k}} (a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j) = -4$$

б) *для четных $n$ справедливо*

$$\sum_{\substack{i \neq j\ \ i \neq n-j \\ i+j=2p\ \ i+j=n+2p}} (a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j) = -8 \quad p = 1, 2 \ldots n/2$$

*и*

$$\sum_{\substack{i\neq j,\ i\neq n-j\\ i+j=2p,\ i+j=n+2p}} (a_ia_j + b_ib_j + c_ic_j + d_id_j) = 0 \quad i,j=0,1,\ \dots\ n-1$$
$$p=1, 2 \dots n/2-1$$

Теорема 2. *Если существуют симметрические и циркулянтные матрицы*

$$A = |a_i|_0^{n-1},\quad B = |b_i|_0^{n-1},\quad C = |c_i|_0^{n-1},\quad D = |d_i|_0^{n-1}$$

*элементы которых удовлетворяют условиям*

1) $|a_i| = |b_i| = |c_i| = |d_i| = 1 \qquad i = 0, 1, \dots, n-1$

2) $a_0a_i + b_0b_i + c_0c_i + d_0d_i = -2$

3) $a_ia_k + b_ib_k + c_ic_k + d_id_k = 0 \quad i\neq k \quad i = 1, 2 \dots n-1,$

*Тогда массив Вильямсона является матрицей Адамара порядка $4n$.*

Определение: *Пусть $A_i, B_i, C_i, D_i$ $i=0, 1 \dots n-1$ $(-1,+1)$ симметрические-циклические матрицы порядка $n$ и пусть*

$$\begin{aligned} X &= A_0\times I + A_1\times U + \dots + A_{n-1}\times U^{n-1}\\ Y &= B_0\times I + B_1\times U + \dots + B_{n-1}\times U^{n-1}\\ Z &= C_0\times I + C_1\times U + \dots + C_{n-1}\times U^{n-1}\\ W &= D\times I + D_1\times U + \dots + D_{n-1}\times U^{n-1}\end{aligned} \tag{5}$$

$X, Y, Z, W$ назовем обобщенными матрицами Вильямсона порядка $nm$, если выполняется условие

$$XX^T + YY^T + ZZ^T + WW^T = 4mnI_m.$$

Теорема 3. *Для того, чтобы матрицы $X, Y, Z, W$, определенные по (5) были бы обобщенными матрицами типа Вильямсона, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

а) $\displaystyle\sum_{i+j=0,\ i+j=n} (A_iA_j + B_iB_j + C_iC_j + D_iD_j) = 4mnI_m$

б) $\displaystyle\sum_{i+j=k,\ i+j=n+k} (A_iA_j + B_iB_j + C_iC_j + D_iD_j) = 0 \qquad i, j = 0, \dots n-1$

$$k = 1, 2 \dots n-1$$

Обозначим следующие массивы соответственно:

$$M_1 = \begin{pmatrix} XR & Y & Z & W\\ -Y & XR & -W^T & Z^T\\ -Z & W^T & XR & -Y^T\\ -W & -Z^T & Y^T & XR\end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} XR & Y & Z & W\\ Y & -XR & W^T & -Z^T\\ -Z^T & W^T & XR & -Y^T\\ W & Z^T & -Y^T & -XR\end{pmatrix}$$

$$M_3=\begin{pmatrix} XR & Y & Z & W \\ -Y & XR & -W^T & Z^T \\ Z & -W^T & -XR & Y^T \\ W & Z^T & -Y^T & -XR \end{pmatrix}$$

$$M_4=\begin{pmatrix} XR & Y & Z & W \\ Y & -XR & -W^T & Z^T \\ Z & W^T & -XR & -Y^T \\ W & -Z^T & Y^T & -XR \end{pmatrix}$$

$$M_5=\begin{pmatrix} XR & Y & Z & W \\ -Y & XR & W^T & -Z^T \\ Z & W^T & -XR & -Y^T \\ -W & Z^T & -Y^T & XR \end{pmatrix}$$

$$M_6=\begin{pmatrix} XR & Y & Z & W \\ -Y & XR & W^T & -Z^T \\ -Z & -W^T & XR & Y^T \\ W & -Z & Y^T & -XR \end{pmatrix}$$

$$M_7=\begin{pmatrix} XR & Y & Z & W \\ Y & -XR & -W^T & Z^T \\ -Z & -W^T & XR & Y^T \\ W & Z^T & -Y^T & XR \end{pmatrix}$$

$$M_8=\begin{pmatrix} XR & Y & Z & W \\ Y & -XR & W^T & -Z^T \\ Z & -W^T & -XR & Y^T \\ W & Z^T & -Y^T & -XR \end{pmatrix},$$

где

$$R=|r_{ij}|^m_{i,j=1} \qquad r_{ij}=\begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть $X, Y, Z, W$ являются обобщенными матрицами типа Вильямсона порядка $n$, тогда массивы $M_i$ $i=1, 2, \dots 8$ являются матрицами Адамара порядка $4n$.*

Из этой теоремы в частности вытекают теоремы Геталс-Зейделя и Бомер-Холла.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Ս. ԱՂԱՅԱՆ, Ա. Գ. ՍԱՐՈՒԽԱՆՅԱՆ

## Ադամարի մատրիցայի կառուցման մասին

*Ներկա աշխատանքում գտնված է Վիլյամսոնի տիպի Ադամարի մատրիցաների գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման, մտցված են մասսիվներ, տրված է այդպիսի մատրիցաների գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման։*

*Ապացուցված է թեորեմ, որից մասնավորաբար բխում են Գետալս-Զեյդելի և Բոմեր-Հոլլի թեորեմները։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Холл.* Комбинаторика. Изд. „Мир", 1970. [2] *W. D. Wallis, A. Pentfold Street and J. Seberry Wallis*, Combinatorics: Room squares, sum-free sets Hadamard matrice, in lecture Notes in Mathematics, vol. 292. 1972. [3] *L. D. Baumert and M. Hall*, Jr., A new construction for Hadamard matrices. Bull. Amer. Math. Sec. 71, 196—170 (1965). [4] *L. D. Baumert and M. Hall*, Jr., Hadamard matrices of Williamson type. Math. Comp. 19, 442—447 (1965). [5] *J. S. Wallis*, On Hadamard Matrices, Journal of combinatorial theory (A), 18, 149—164 1975. [6] *Edward Spence*, Skew-Hadamard matrices of the Goethals-Seidel type. Com. J. Math., Vol. XXVII, № 3, pp. 550—560, 1975. [7] *A. L. Whiteman* Hadamard matrices of Williamson type. J. Austral Math, Soc. 21 (Series A). 481—486 (1976).