

УДК 519.7

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, В. Г. Ушаков

О длине очереди системы $E_k/G|1|\infty$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 21/VI 1977)

1°. В одноканальную систему массового обслуживания поступает рекуррентный поток вызовов. причем интервалы τ_i между последовательными поступлениями вызовов представимы в виде: $\tau_i = \xi_1 + \dots + \xi_k$. Случайные величины (сл. в.) ξ_i ($i = \overline{1, k}$) независимы в совокупности и $P\{\xi_i \leq x\} = 1 - e^{-a_i x}$, $a_i > 0$, $x \geq 0$. Длительности обслуживания суть независимые в совокупности и не зависящие от процесса поступления сл. в. с функцией распределения $B(t)$ и плотностью $b(t)$.

Можно сказать, что каждый вызов до поступления в систему проходит к экспоненциально распределенных фаз поступления.

В начальный момент система свободна от вызовов и протекает 1-ая фаза.

Пусть: $n(t)$ — длина очереди в момент времени t ; $x(t)$ — время прошедшее с начала обслуживания вызова до момента t , обслуживаемого в момент t ; $i(t)$ — номер фазы поступления, на которой находится в момент t очередной поступающий вызов.

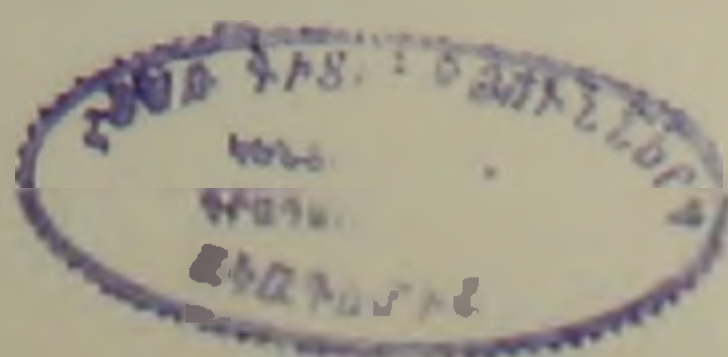
Положим

$$\beta(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB(t); \beta_i = \int_0^\infty t^i dB(t);$$

$$\bar{P}_i(n, x, t) dx = P\{n(t) = n, i(t) = i, x \leq x(t) < x + dx\};$$

$$P_i(z, x, t) = \sum_{n \geq 1} z^n \bar{P}_i(n, x, t); p_i(z, x, s) = \int_0^\infty e^{-st} P_i(z, x, t) dt; \quad (1)$$

$$P_{i0}(t) = P\{n(t) = 0, i(t) = i\}, P_{i0}(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_{i0}(t) dt.$$



а δ_{ij} — символ Кронекера.

Частный случай вышеописанной системы при $a_1 = \dots = a_k = a$ изучался в (1) методом вложенных цепей Маркова.

2°. Рассмотрим уравнение

$$\prod_{l=1}^k [\lambda + s + a_l] = z \cdot c_{1k}, \quad c_{lj}(s) = \prod_{m=l}^j (a_m + s), \quad c_{lj} = c_{lj}(0) \quad (1 \leq l < j \leq k) \quad (2)$$

Обозначим корни уравнения (2) через $\lambda_j(z, s)$, ($j = \overline{1, k}$). Очевидно, $\lambda_j(z, s) = -s + \lambda_j(z)$ заметим, что $\lambda_j(z)$ за исключением разве что в одной точке различны.

Следующая лемма используется при доказательстве теоремы.

Лемма. *Функциональное уравнение $z = \beta(s - \lambda_j(z))$ определяет единственную функцию $\bar{z}_j(s)$, аналитическую в области $\text{Re } s > 0$.*

Положим: $\bar{\lambda}_j(s) = \lambda_j(\bar{z}_j(s))$.

Пусть выполнено условие существования стационарного распределения

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} 1 - (a_1^{-1} + \dots + a_k^{-1})^{-1} \beta_1 > 0$$

и

$$p(z) = \lim_{s \rightarrow 0} s p(z; s); \quad p(z; s) = \sum_{i=1}^k \left[\int_0^{\infty} p_i(z, x, s) dx + p_{i0}(s) \right] \quad (3)$$

$$p_{i0} = \lim_{s \rightarrow 0} s p_{i0}(s). \quad (4)$$

Теорема 1. *Функция $p(z; s)$ определяется из уравнений*

$$\begin{aligned} p(z; s) = & \sum_{l=1}^k p_{l0}(s) + p_{k0}(s) \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\prod_{l=1}^k [\lambda_j(z) - \bar{\lambda}_l(s)]}{\sum_{l=1}^k \prod_{i=1}^k [\lambda_j(z) + a_i]} \\ & \times \frac{1 - \beta(s - \lambda_j(z))}{s - \lambda_j(z)} \cdot \frac{a_k(z-1)}{\lambda_j(z)} |1 - z^{-1} \beta(s - \lambda_j(z))|^{-1}; \\ p_{k0}(s) = & c_{1k-1} \cdot \left(\prod_{j=1}^k (s - \bar{\lambda}_j(s)) \right)^{-1}; \\ p_{i0}(s) = & \left\{ c_{i+1k}(s) + \sum_{l=i+1}^k a_l(s) c_{l+1 \dots l-1}(s) \cdot c_{lk-1} \right\} \times \\ & \times c_{i1 \dots i-1} \left(\prod_{j=1}^k (s - \bar{\lambda}_j(s)) \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$a_l(s) = (-1)^{k-l+1} c_{lk-1}^{-1} \sum_{j=0}^{k-l+1} \left\{ \left(\sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_j < l} a_{l_1} \dots a_{l_j} \right) \times \right. \quad (7)$$

$$\times \left(\sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_{k-l+1-j}} \bar{\lambda}_{l_1}(s) \cdot \dots \cdot \bar{\lambda}_{l_{k-l+1-j}}(s) \right) \Big\}$$

2. Стационарная производящая функция распределения длины очереди задается соотношениями

$$\begin{aligned} p(z) = \rho \cdot \left\{ 1 + \frac{c_{1k-1}}{\prod_{j=2}^k (-\bar{\lambda}_j(0))} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{\prod_{l=1}^i [\lambda_j(z) - \bar{\lambda}_l(0)]}{\sum_{l=1}^k \prod_{\substack{l+j \\ l=1}} [\bar{\lambda}_j(z) + a_l]} \times \right. \\ \left. \times \frac{1 - \beta(-\lambda_j(z))}{-\lambda_j(z)} \cdot \frac{a_k(z-1)}{\lambda_j(z)} |1 - z^{-1} \beta(-\lambda_j(z))|^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

а числа $p_{i0} (i = 1, \bar{k})$ равны

$$\begin{aligned} p_{k0} &= \frac{\rho c_{1k-1}}{\prod_{j=2}^k (-\bar{\lambda}_j(0))}; \\ p_{i0} &= \rho \cdot \frac{c_{i+1k} + \sum_{l=i+1}^k a_l(0) c_{l+1k-1}}{\prod_{j=2}^k (-\bar{\lambda}_j(0))} c_{i1-1} \quad (i = 1, \bar{k-1}) \end{aligned} \quad (9)$$

3. Стационарное математическое ожидание числа вызовов в системе имеет вид:

$$\begin{aligned} P_1 = \frac{dp(z)}{dz} \Big|_{z=1} = \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} \beta_1 + \frac{\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} \right)^2 \beta_2}{2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} \beta_1 \right)} - \frac{\gamma_k \cdot \gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1}^2} \times \\ \times \frac{1}{1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} \beta_1} - \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} \left[\frac{1}{\bar{\lambda}_1(0)} + \dots + \frac{1}{\bar{\lambda}_k(0)} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\gamma_k = c_{1k}, \quad \gamma_{k-1} = \sum a_{i_1} \dots a_{i_{k-1}}; \quad \gamma_{k-2} = \sum a_{i_1} \dots a_{i_{k-2}} \quad (11)$$

3°. Доказательство. Дадим лишь набросок доказательства.

Вначале выводим разностные уравнения в частных производных с переменными коэффициентами для определения $P_0(z; x; t)$ и $P_{i0}(t)$. Далее, переходим к преобразованию Лапласа по t в полученных уравнениях, которые после введения обозначения

$$p_i(z, x, s) = |1 - B(x)| \cdot Q_i(z, x, s) \quad (12)$$

записываются так

$$\frac{\partial Q_l(z, x, s)}{\partial x} = -[s + a_l] Q_l(z, x, s) + (1 - \delta_{l1}) a_{l-1} \times \\ \times Q_{l-1}(z, x, s) + \delta_{l1} a_k z Q_k(z, x, s), \quad (13)$$

$$Q(z, 0, s) = z^{-1} \int_0^\infty Q_l(z, x, s) dB(x) - (s + a_1) p_{10}(s) + \\ + \delta_{11} + (1 - \delta_{11}) a_{l-1} p_{l-10}(s) + \delta_{11} a_k z p_{k0}(s). \quad (14)$$

Характеристическое уравнение системы (13) рассмотрено в лемме, поэтому решение системы (13) суть:

$$Q_l(z, x, s) = \sum_{j=1}^k \beta_j^{(l)}(z; s) e^{-(s + \lambda_j(z))x}, \quad (15)$$

где $\beta_j^{(l)}(z; s)$ находятся подстановкой (15) в (13)

$$\beta_j^{(l)}(z; s) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{a_{i+1} + \lambda_i(z)}{a_i} \beta_j^{(k)}(z; s) \quad (l, j = \overline{1, k}). \quad (16)$$

Осталось найти $\beta_j^{(k)}(z; s)$, для чего (15) подставляем в (14) и используем (16)

$$\sum_{j=1}^k \delta_j^{(k)}(z; s) \prod_{l=1}^{k-1} \frac{a_{l+1} + \lambda_l(z)}{a_l} = f_1, \quad (17)$$

где обозначено

$$\begin{cases} f_1 = f_1(z; s) = -[s + a_1] p_{10}(s) + 1 + a_k z p_{k0}(s), \\ f_i = f_i(s) = -[s + a_i] p_{i0}(s) + a_{i-1} p_{i-10}(s) \quad (i = \overline{2, k}) \end{cases} \quad (18)$$

$$\delta_j^{(k)}(z; s) = \beta_j^{(k)}(z; s) [1 - z^{-1} \beta(s - \lambda_j(z))]. \quad (19)$$

Для определения $\delta_j^{(k)}(z; s)$ в (17) делаем замену переменных

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j^l(z) \delta_j^{(k)}(z; s) = y_{k-l} \quad (l = \overline{0, k-1}) \quad (20)$$

и полученные после замены уравнения разрешаются

$$y_i = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} c_{jk-1} f_j \sum_{l < l_1 < \dots < l_{j-1} < k} a_{l_1} \cdot \dots \cdot a_{l_{j-1}} \quad (l = \overline{2, k}) \\ y_1 = c_{1k-1} f_1 + \sum_{j=2}^k (-1)^{j-1} c_{jk-1} f_j \sum_{l < l_1 < \dots < l_{j-1} < k} a_{l_1} \cdot \dots \cdot a_{l_{j-1}}. \quad (21)$$

Из (21) и (18) следует, что y_i ($i = \overline{2, k}$) не зависят от z . Решаем теперь систему (20), учитывая, что $\lambda_j(z)$ удовлетворяет характеристическому уравнению, и приходим к формуле для $\delta_j^{(k)}(z; s)$. Эта формула представляется в виде отношения со знаменателем

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (\lambda_j(z) - \lambda_i(z))$$

и с числителем, $p_{k0}(s)\lambda_j^k(z) + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_j^i(z)a_i(s)$ (вид коэффициентов $a_i(s)$ нас не интересует).

Из (19) и леммы вытекает, что $\delta_j^{(k)}(z; s) = 0$ при $z = \bar{z}_j(s)$, следовательно, числитель $\delta_j^{(k)}(z; s)$ при $z = \bar{z}_j(s)$ обращается в нуль, т. е. $\bar{z}_j(s)$ ($j = \overline{1, k}$) являются корнями уравнения

$$p_{k0}(s)\omega^k + \sum_{i=0}^{k-1} \omega^i a_i(s) \equiv p_{k0}(s) \prod_{i=1}^k |\omega - \bar{\lambda}_i(s)|$$

В частности, числитель $\delta_j^{(k)}(z; s)$ равен $p_{k0}(s) \prod_{i=1}^k |\lambda_j(z) - \bar{\lambda}_i(s)|$.

Следовательно,

$$\delta_j^{(k)}(z; s) = \frac{p_{k0}(s) \prod_{i=1}^k |\lambda_j(z) - \bar{\lambda}_i(s)|}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k |\lambda_i(z) - \lambda_j(z)|}.$$

Учитывая характеристическое уравнение и (19), имеем

$$|1 - z^{-1}\beta(s - \lambda_j(z))| \beta_j^{(k)}(z; s) = \frac{p_{k0}(s) \prod_{i=1}^k |\lambda_j(z) - \bar{\lambda}_i(s)|}{\sum_{i=1}^k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k |\lambda_j(z) + a_i|}. \quad (22)$$

Подстановка (22) в (17) дает уравнения для определения $p_{i0}(s)$, решение которых есть (5).

Таким образом, $\beta_j^{(k)}(z; s)$, найденные по (16), (22), вкупе с (15), (12) определяют $P_i(z, x, t)$, откуда просто перейти к $p(z; s)$.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
Московский государственный университет

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Վ. Գ. ՈՒՇԱԿՈՎ

$E_k |G| |\infty$ սիստեմի հերթի երկարության մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է $E_k |G| |\infty$ զանգվածային սպասարկման սիստեմ, ներմատող հոսքի երկու հաջորդական պահանջների առաջացման մոմենտների միջև ընկած հեռավորությունը կազմված է k հատ անկախ էքսպոնենցիալ բաշխում ունեցող պատահական մասնաձևներից (պահանջների

առաջացման ֆազաներից): i -րդ ֆազայի բաշխման ֆունկցիայի պարամետրը հավասար է $a_i > 0$ ($i = \overline{1, k}$): $t = 0$ մոմենտը համապատասխանում է 1-ֆազային:

Պահանջների սպասարկման ժամանակի բաշխման ֆունկցիան ունի խտություն և նրա Լապլաս-Ստիլտեսի ձևափոխությունն է $\beta(s)$ -ը, $\text{Re } s \geq 0$.

Դիցուք՝ $n(t)$ -ն հանդիսանում է հերթի պատահական երկարությունը t մոմենտին: $P(n, t)$ թող լինի հավանականությունն այն բանի, որ t մոմենտին $n(t) = n$,

$$p(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} e^{-st} P(n, t) dt \quad (|z| \leq 1; \text{Re } s \geq 0):$$

Թեորեմ. — $p(z, s)$ ֆունկցիան որոշվում է հավասարումներից ($i = \overline{1, k-1}$)

$$p(z, s) = \sum_{i=1}^k p_{i0}(s) + p_{k0}(s) \sum_{j=1}^k \frac{\prod_{i=1}^k |\lambda_j(z) - \bar{\lambda}_i(s)|}{\sum_{i=1}^k \prod_{i=1}^k |\lambda_j(z) + a_i|} \times \\ \times \frac{1 - \beta(s - \lambda_j(z))}{s - \lambda_j(z)} \frac{a_k(z-1)}{\lambda_j(z)} |1 - z^{-1} \beta(s - \lambda_j(z))|^{-1},$$

$$p_k(s) = c_{1k-1} \left(\prod_{j=1}^k (s - \lambda_j(s)) \right)^{-1},$$

$$p_{i0}(s) = \left\{ c_{i+1k}(s) + \sum_{l=i+1}^k a_l(s) c_{l+1l-1}(s) c_{lk-1} \right\} c_{i1-1} \left(\prod_{j=1}^k (s - \bar{\lambda}_j(s)) \right)^{-1},$$

$$a_l(s) = (-1)^{k-l+1} c_{lk-1}^{-1} \sum_{j=0}^{k-l+1} \left\{ \left(\sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_{j+1} \leq k} a_{l_1} \dots a_{l_{j+1}} \right) \times \right. \\ \times \left. \left(\sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_{k-l+1-j} \leq k} \bar{\lambda}_{l_1}(s) \dots \bar{\lambda}_{l_{k-l+1-j}}(s) \right) \right\},$$

$$zc_{1k}(s) = \prod_{i=1}^k |\lambda_i + s + a_i|, \quad c_{ij}(s) = \prod_{m=1}^j (a_m + s), \quad c_{ij} = c_{ij}(0) \quad (j = \overline{1, k}).$$

$\bar{\lambda}_j(s)$ գտնվում է հավասարումից՝ $\bar{\lambda}_j(s) = \lambda_j(\bar{z}_j(s))$, որ $\bar{z}_j(s)$ հանդիսանում են $z = \beta(s - \lambda_j(z))$ հավասարումների լուծումներ տարբեր $\lambda_j(z)$ -րի դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐՇՈՒՄՆԵՐՆԵՐ

Г. И. Климов, Стохастические системы обслуживания, М., Наука, 1966.