ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXV 1977 3

УДК 517.91+513.83

МАТЕМАТИКА

С. Д. Григорян

Об условиях существования колебательных режимов в одном классе гамильтоновых систем

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 12/VII 1977)

1. Данная работа посвящена нахождению класса гамильтоновых систем, которые обладают свойствами аналогичными свойствам, обнаруженным В. А. Белинским, Е. М. Лифшицем и И. М. Халатниковым (БЛХ) (1), у системы, описывающей однородную космологическую модель IX типа в общей теории относительности. Точнее, выделяется класс гамильтоновых систем, обладающих колебательными режимами типа "режима БЛХ".

Основным результатом работы является теорема 1, в которой приводятся достаточные условия для существования у гамильтоновой системы колебательного режима, допускающего сепаратрисную аппроксимацию. Доказательство теоремы основывается на том, что гамильтонова система, удовлетворяющая ее условиям, после надлежащего преобразования координат имеет множество неустойчивых особых точек Ф. Определяется отображение **T** множества Ф в себя: в случае, когда сепаратриса, выходящая из особой точки единственна, особая точка отображается в конечную точку этой сепаратрисы; в случае же, когда сепаратриса не единственна, особая точка отображается в точку, в которую входят почти все сепаратрисы. Итерации отображения **T** дают комбинаторную модель колебательных режимов, имеющихся в динамической системе.

В теореме 2 рассмотрен альтернативный случай, когда у гамильтоновой системы нет колебательного режима, а есть устойчивая асимптотика решений.

2. Рассмотрим гамильтоновы системы

$$\frac{dp_i}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad \frac{dq_i}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$H=\frac{1}{D(q_i)}\left(T(P_i)+V(q_i)\right), \tag{1}$$

где $P_i=p_iq_i$, $T(P_i)$ — однородный многочлен (функция) степени μ, $V(q_i)$ — однородный многочлен (функция) степени λ, $D(q_i)=q_1^{\alpha_1}, q_2^{\alpha_2} \ldots q_n^{\alpha_n}, \alpha_i>0$.

Сделаем замену координат

$$\overline{P}_i=\frac{P_i}{\sqrt{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} P_\alpha^2}}, \quad \overline{q}_i=\frac{q_i}{\sqrt{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} q_\alpha^2}}, \quad G=\sum q_\alpha^2, \quad w=\frac{\left(\sqrt{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} q_\alpha^2}\right)^\lambda}{\left(\sqrt{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} P_\alpha^2}\right)^\lambda} \tag{2}$$

и замену времени $\dfrac{d\tau_1}{d\tau}=\dfrac{\left(\sqrt{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} P_\alpha^2}\right)^{\mu-1}}{D}$.

Система (1) в координатах (2) и времени τ_1 имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{P}}_i &= w\left(-\frac{\partial V}{\partial \overline{q}_i}\overline{q}_i+\overline{P}_i\frac{\partial V}{\partial \overline{q}_\alpha}\overline{q}_\alpha \overline{P}_\alpha\right)+\left(\alpha_i-\overline{P}_i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\overline{P}_j\right)H_1\\
\dot{\overline{q}}_i &= \overline{q}_i\left(\frac{\partial T}{\partial \overline{P}_i}-\frac{\partial T}{\partial \overline{P}_\alpha}\overline{q}_\alpha^2\right),\\
\dot{w} &= w\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial \overline{P}_i}\overline{q}_i^2+\mu w\frac{\partial V}{\partial \overline{q}_i}\overline{q}_i\overline{P}_i-\mu\alpha_i\overline{P}_iH_1\right),
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\dot{G}=2G\left(\sum\frac{\partial T}{\partial \overline{P}_i}\overline{q}_i^2\right). \tag{3'}$$

Здесь $H_1=T(\overline{P}_i)+wV(\overline{q}_i)$.

Отметим, что система (3), (3′) содержит замкнутую подсистему (3) в координатах $\overline{P}_i$, $\overline{q}_i$, w — это следствие наличия группы масштабных преобразований у системы (1).

З а м е ч а н и е. Если использовать вместо координаты G (2) координату $\overline{G}=1/G$, последнее уравнение (3′) в системе (3), (3′) заменится на

$$\dot{\overline{G}}=-2\overline{G}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \overline{P}_i}\overline{q}_i^2\right). \tag{3''}$$

Полное многообразие S, на котором рассматривается система (3), (3′), выделяется условиями:

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i^2=1, \quad \sum_{i=1}^{n}\overline{q}_i^2=1, \quad w\geqslant 0, \quad G\geqslant 0.\ *$$

---

* Здесь и ниже, применительно к теореме 2, координату G надо заменять на $\overline{G}$, а уравнение (3′) заменять уравнением (3″).

Локальная карта с исходными координатами p_i, q_i на этом многообразии покрывает область $w>0$, $G>0$.

Таким образом, переход к координатам (2) означает компактификацию этой области границей Γ, имеющей две компоненты Γ_0 и Γ_1, определенные условиями

$$\Gamma_0 : w=0, \quad \Gamma_1 : G=0.$$

Система (3), (3′) на многообразии S имеет множество особых точек Φ, лежащее на пересечении Y компонент Γ_0 и Γ_1, $(Y=\Gamma_0 \cap \Gamma_1)$, и состоящее из n компонент Φ_i, выделяемых следующими условиями:

$$\bar{q}_i=1, \quad \bar{q}_j=0, \quad (j \neq i) \tag{4}$$

$$G=0, \quad w=0, \quad \sum \alpha_k \frac{\partial T}{\partial P_k}<0, \quad \sum \bar{P}_k^2=1.$$

Теорема 1. *Если функции* $T(P_i)$ *и* $V(q_i)$ *удовлетворяют перечисленным ниже условиям* 1), 2), 3), *то у системы* (3), (3′) *при* $\lambda>0$ *имеется множество неустойчивых особых точек* Φ *инвариантное относительно отображения* $\mathbf{T}$, *вследствие чего система* (1) *имеет решения со сложным колебательным режимом изменения координат*

Перечислим условия 1), 2), 3):

1) в точках $\bar{\mathbf{P}}_i=(\bar{P}_j=\delta_{ij})$ выполнены условия $T(\mathbf{P}_i)_{(>)}^{<}0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$;
   в точках $\mathbf{Q}_i=(q_j=\delta_{ij})$, $V(\mathbf{Q}_i)_{(>)}^{<}0$ $(i=1, 2, \ldots n)$;

2) если в некоторой точке $\mathbf{P}$ имеем $\alpha_k \dfrac{\partial T(\bar{P}_i)}{\partial P_k}=0$, то $T(\bar{P}_i)_{(>)}^{<}0$,

3) многообразие $T(\bar{P}_i)=0$ имеет размерность $(n-1)$; почти всюду на многообразии $T(\bar{P}_i)=0$, $\alpha_k \dfrac{\partial T}{\partial \bar{P}_k}<0$, одна и только одна из величин положительна.

Доказательство теоремы 1 мы проведем одновременно с доказательством теоремы 2 справедливой при более слабых ограничениях на функции $T(\bar{P}_i)$, $V(\bar{q}_i)$.

Теорема 2. *Если функция* $T(\bar{P}_i)$ *такова, что в некоторой особой точке*, $\mathbf{P} \in \Phi_i$, *системы* (3), (3″)

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \bar{P}_k} \right\} = \frac{\partial T}{\partial \bar{P}_i} > 0, \tag{5}$$

то при $\lambda<0$ *существует устойчивая асимптотика решений системы, в которой* $q_i \to \infty$, $q_j/q_i \to 0$, *справедливая для целой области в пространстве решений системы* (1).

Доказательство. Каждое из множеств Φ_i является открытой областью на многообразии $T(\bar{P}_i)=0$ в сфере S^{n-1} и имеет размерность $(n-2)$. Собственные числа системы (3), (3′) на $2n$-мерном многообразии S в особых точках Φ_i следующие

$$\lambda_j = \frac{\partial T}{\partial \overline{P}_j} - \frac{\partial T}{\partial \overline{P}_i} \qquad \text{(переменная } \overline{q}_j,\ j \neq i) \tag{6}$$

$$\lambda_n = \lambda \frac{\partial T}{\partial \overline{P}_i} \qquad \text{(переменная } w)$$

$$\lambda_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial T}{\partial \overline{P}_k} \qquad \text{(переменная } \overline{P}_e)$$

$$\lambda_{n+2} = \begin{cases} 2\dfrac{\partial T}{\partial \overline{P}_i} & \text{(переменная } G) \\ -2\dfrac{\partial T}{\partial \overline{P}_i} & \text{(переменная } \overline{G}) \end{cases}$$

Остальные $(n-2)$ собственных числа, отвечающие направлениям касательным к множеству Φ_i, равны нулю. Имея выражения собственных чисел (6) легко доказать теорему 2.

Действительно, если в особой точке $\mathbf{P} \in \Phi_i$, выполнено условие (5), то при $\lambda < 0$ все собственные числа (6) системы (3), (3″) отрицательны. Поэтому особые точки $\mathbf{P} \in \Phi_i$ и близкие к ним являются притягивающими. Из определения множества Φ_i следует, что вдоль траекторий входящих в эти особые точки $q_j/q_i \to 0$ так как $\overline{q}_j/\overline{q}_i \to 0$, а $q_i \to \infty$ так как $G \to \infty$ (это следует из того, что $\overline{G} \to 0$).

Теорема 2 таким образом доказана.

Переходя к доказательству теоремы 1, заметим, что из условия 3) следует, что для почти всех точек из Φ_i среди собственных чисел λ_i и λ_n при $\lambda > 0$ имеются числа противоположных знаков, поэтому в этом случае особые точки из Φ_i являются невырожденными и неустойчивыми. Проинтегрируем сепаратрисы выходящие из этих особых точек.

1. Предположим, что в особой точке $\mathbf{P}^0 \in \Phi_i$ выполнено условие $\frac{\partial T}{\partial \overline{P}_i} > 0$, тогда из условий 2), 3) и из (6) следует, что $\lambda_j < 0$, $\lambda_n > 0$, $\lambda_{n+1} < 0$. Поэтому из точки $\mathbf{P}^0$ выходит одна единственная сепаратриса, вдоль которой $\overline{q}_j = \delta_{ij}$ и изменяются координаты w, $\overline{P}_e$, причем $H_1 = 0$. Система (5) при условии $\overline{q}_i \equiv \delta_{ij}$ и после замены времени

$$\frac{d\tau_1}{dt} = -w \frac{\partial V(\mathbf{Q}_i)}{\partial \overline{q}_i}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\overline{P}}_i &= 1 - \overline{P}_i^2, \\ \dot{\overline{P}}_j &= -\overline{P}_i \overline{P}_j, \\ \dot{w} &= \lambda \frac{\partial T}{\partial \overline{P}_i} \left(\frac{\partial V(\mathbf{Q}_i)}{\partial q_1} \right)^{-1} + \mu \overline{P}_i \end{aligned} \tag{7}$$

Из первых двух уравнений находим

$$\overline{P}_i = \operatorname{th} t, \quad \overline{P}_j = \overline{P}_j^0 \frac{\operatorname{ch} t_0}{\operatorname{ch} t} \tag{8}$$

здесь $\overline{P}_j^0 = \overline{P}_j(t_0)$. Следовательно, сепаратриса выходящая (при $t = t_0$) из точки $\mathbf{P}^0$ на $T(\overline{P}_i) = 0$ при $t \to +\infty$ в координатах $\overline{P}_k$ движется по кратчайшей дуге большого круга, на сфере S^{n-1}, проходящего через точки $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}^0$. Выражение координаты w вдоль этой сепаратрисы можно получить из условия $H_1 = 0$:

$$T(\overline{P}_i) + wV(\mathbf{Q}_i) = 0 \tag{9}$$

Поскольку в силу условия 1) $V(\mathbf{Q}_i) < 0$ из (8) следует, что вдоль сепаратрисы (8) $H_1 = 0$, $T(\overline{P}_i) > 0$. Однако по условию 1) $T(\mathbf{P}_i) < 0$ следовательно сепаратриса (9) выходящая из точки $\mathbf{P}^0$, $T(\mathbf{P}^0) = 0$, пересекает поверхность $T(P_i) = 0$ в некоторой другой точке $\mathbf{P}^1$, $T(\mathbf{P}^1) = 0$, в этой точке согласно (9) $w = 0$ т. е. точка $\mathbf{P}^1$ также принадлежит множеству Φ_i. Таким образом в рассматриваемом случае отображение $\mathbf{T}$ определено $\mathbf{T}(\mathbf{P}^0) = \mathbf{P}^1$. Отметим, что в точке $\mathbf{P}^1$, как и на всей сепаратрисе (7), справедливо неравенство $\alpha_k \dfrac{\partial T}{\partial P_k} < 0$, это следствие условия 2) и условия $T(\mathbf{P}^1) = 0$. Очевидно, в конечной точке $\mathbf{P}^1$ имеем $\dfrac{\partial T}{\partial P_i} < 0$. Действительно, вдоль сепаратрисы (8) координата $\overline{P}_i$ монотонно растет, $T(\overline{P}_k) > 0$ и в конечных точках $T(\mathbf{P}^0) = T(\mathbf{P}^1) = 0$, следовательно, знаки в конечных точках сепаратрисы противоположны.

II. Предположим, что в особой точке $\mathbf{P}^0 \in \Phi_i$ имеем $\dfrac{\partial T}{\partial \overline{P}_i} < 0$. Согласно условиям 2) и 3) из (6) получаем $\lambda_n < 0$, $\lambda_{n+2} < 0$. Из этой особой точки выходит целый пучок сепаратрис; размерность этого пучка равна числу тех j, для которых

$$\frac{\partial T}{\partial \overline{P}_j} - \frac{\partial T}{\partial \overline{P}_i} > 0 \tag{10}$$

Обозначим множество этих j через J. Вдоль этих сепаратрис изменяются координаты $\overline{q}_j$, $j \in J$ остальные $\overline{q}_k = 0$, координаты $w = 0$, $\overline{P}_k = P_k^0$ постоянны.

Проинтегрировав эти сепаратрисы получим

$$q_j = \frac{c_j \exp\left(\dfrac{\partial T}{\partial \overline{P}_j}\tau_1\right)}{\left(\sum\limits_{k \in J} c_k^2 \exp\left(2\dfrac{\partial T}{\partial \overline{P}_k}\tau_1\right)\right)^{1/2}}, \quad c_j = \mathrm{const},\ j \in J \tag{11}$$

Из (11) следует, что почти при всех значениях c_j при $\tau_1 \to -\infty$, $\overline{q}_j \to 0$, $(j \neq i)$, $\overline{q}_i \to 1$, а при $\tau_1 \to +\infty$, $\overline{q}_i \to 0$, $\overline{q}_{j_0} \to 1$. (j_0 — это индекс соответствующий максимальному собственному значению λ_j, $j \in J$). Таким образом почти все сепаратрисы, выходящие из точки $\mathbf{P}^0 \in \Phi_i$ идут в точку $(\overline{P}_k = P_k^0, \overline{q}_k = \delta_{kj_0}, k = 1, \ldots, n)$, что и определяет в данном случае отображение **T**.

Отметим, что из того, что условие 3) выполнено почти всюду на многообразии $T(\overline{P}_i) = 0$, следует, что отображение определено почти всюду. Это отображение не определено в вырожденных особых точках, в которых собственные числа (6) меняют знак, то есть $\frac{\partial T}{\partial \overline{P}_i} = 0$. Очевидно, почти всюду на Φ_i для любого i определено отображение **T**. Полученный результат означает, что существуют сколь угодно длинные последовательности сепаратрис, движущихся между Φ_i. Очевидно, траектория, начавшаяся достаточно близко к одной из сепаратрис, будет двигаться вдоль всей этой последовательности. В частности, траектория будет последовательно оказываться в окрестности множеств Φ_i, где $\overline{q}_i = \delta_{ij}$ следовательно изменение координат q_i вдоль этой траектории имеет пульсирующий характер — что и означает наличие колебательного режима (см. [2, 3]).

Это заканчивает доказательство теорем 1 и 2.

В заключение отметим, что первые примеры гамильтоновых систем вида (1), удовлетворяющих условиям теоремы 1, были указаны в работах [2], [3]. Если условия 1), 2), теоремы 1, выполнены для некоторой системы вида (1), то они также справедливы и для всех близких к ней систем этого вида. Наиболее ограничительным является условие 3). Из этого условия следует, что $\frac{\partial T}{\partial P_k}$ обращается в ноль парами. Если $T(P_i)$ — квадратичная трехмерная форма, а $x_i = \frac{\partial T}{\partial P_i}$, то $T(P_i) = c_1 x_2 x_3 + c_2 x_1 x_3 + c_3 x_1 x_2$ — наиболее общий вид такой функции.

Автор выражает глубокую благодарность член - корреспонденту АН СССР С. П. Новикову за внимание к работе.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Դ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Համիլտոնյան սիստեմների մի դասում տատանողական ռեժիմների գոյության պայմանների մասին

Աշխատանքում առաջարկված են Համիլտոնյան սիստեմների լուծումների ԲԼԽ-ի տիպի (տես Վ. Ա. Բելինսկու, Ե. Մ. Լիֆշիցի և Ի. Մ. Խալատնիկովի[1])

աշխատությունը) տատանողական ռեժիմի գոյության համար բավարար պայմաններ։

Հետազոտման հիմնական մեթոդը՝ դա սեպարատրիսային ապրոկսիմացիայի մեթոդն է, որը թույլ է տալիս կառուցել տատանողական ռեժիմի կոմբինատոր մոդելը (թեորեմ 1)։

Դիտարկված է նաև այն դեպքը, երբ համիլտոնյան սիստեմի լուծումները ունեն կայուն ասիմպտոտիկա և, հետևաբար, այդ սիստեմը չունի տատանողական ռեժիմ (թեորեմ 2)։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников,* УФН, 102, № 3 (1970). [2] *О. И. Богоявленский, С. П. Новиков,* Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 1, (1975). [3] *О. И. Богоявленский, С. П. Новиков,* УМН, 31, № 5 (1976).