ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXV 1977 3

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Г. Р. Оганесян

О некоторых смешанных задачах для слабо гиперболических уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 23/VI 1977)

Настоящая заметка посвящена исследованию достаточных условий корректности смешанных задач в полуполосе для одномерных слабо гиперболических уравнений высоких порядков с вырождением на начальной полупрямой.

Такого типа задачи для уравнений второго порядка изучались в работах многих авторов ([1-4] и др.), в то время как для уравнений высоких порядков, по видимому, лишь в работе Билса ([5]). Смешанные задачи для слабо гиперболических (не симметризуемых) систем рассмотрены в ([6]).

Рассмотрим одномерный дифференциальный оператор (временная переменная $-t$ и одна пространственная переменная $-x$):

$$P(D)\equiv\sum a_\alpha D^\alpha,\ |\alpha|\leqslant m+1,\quad a_\alpha(t,x)\in C^\infty(\overline{\Omega}) \tag{1}$$

в области $\Omega=\{(t,x)\in R^2,\ 0<t<T,\ 0<x<\infty\}$
с главным символом

$$P_0(\xi_0,\xi_1)=\sum_{|\alpha|=m+1} a_\alpha\xi^\alpha=\prod_{j=1}^{m+1}(\xi_0-\lambda_j(t,x)\,\xi_1),$$

причем $Im\lambda_j=0$, $j=1,\ldots,m+1$ в $\overline{\Omega}$ (слабая гиперболичность).

Пусть из каждой точки интервала $(0,T)$ временной оси в Ω входит l характеристик, т. е.

$$\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_s<\ldots<\lambda_l<0<\lambda_{l+1}<\ldots<\lambda_{m+1} \tag{2}$$

при $0<t<T$, $x=0$.

Мы допустим, что лишь одна группа характеристик касается при $t=0$, а именно

$$\lambda_{s+1},\lambda_{s+2},\ldots,\lambda_{s+r}\to 0\quad\text{при}\quad t\to 0;\quad 0\leqslant s<m,\ 0<r\leqslant m+1$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_r=\{\mu(t)=\mu_1(t),\mu_2(t),\ldots,\mu_r(t))\}$ множество непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ вектор-функций, компоненты которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\mu_i(+0)=0,\quad \mu_i(t)>0 \quad \text{при} \quad t>0;\quad \mu_i'(t)\geqslant 0,\quad i=1,\ldots,r$$
$$\mu_{i+1}(t)\leqslant c\mu_i(t),\quad \frac{d}{dt}\ln\mu_i(t)\leqslant c\frac{d}{dt}\ln\mu_{i+1},\quad i=1,\ldots,r-1, \tag{4}$$

где через c здесь и дальше мы обозначаем некоторые постоянные. Введем вспомогательный оператор

$$R(D)=\sum a_\alpha D^\alpha,\ |\alpha|\leqslant m+1,\ \alpha_0\geqslant r+|\alpha|-m-1 \tag{5}$$

с характеристиками постоянной кратности r.
Обозначим через R^{-1} обратный оператор корректной задачи Коши (см. [6]):

$$R(D)u=f \text{ в } \Omega,\ D_t^k u|_{t=0}=0,\quad k=0,\ldots,m \tag{6}$$

Пусть, далее, K-класс слабо гиперболических операторов таких, что существует вектор-функция $\mu\in\mathfrak{M}_r$ такая, что

$$|\lambda_{i+s}|,\ |D_x\lambda_{i+s}|\leqslant c\mu_i(t),\ i=1,\ldots,r \tag{7}$$

$$|D_t\lambda_{i+s}|\leqslant\left(c+\bar{c}_i\frac{\mu_i'}{\mu_i}\right)\mu_i(t),\quad i=1,\ldots,r, \tag{8}$$

$$|\lambda_i-\lambda_j|\geqslant c\cdot\mu_{j-s},\quad s<j<i<r+s, \tag{9}$$

$$|\lambda_i-\lambda_j|>0,\quad s+r\leqslant j<i,\quad j\leqslant s<r+s<i \tag{10}$$

при $(t,x)\in\bar{\Omega}$.

Рассмотрим смешанную задачу

$$P(D)u=f,\quad (t,x)\in\Omega \tag{11}$$

$$D_t^k u|_{t=0}=0,\quad k=0,\ldots,m \tag{12}$$

$$B_j u|_{x=0}\equiv\sum_{s=0}^{m} b_{js}(t)D_t^{m-s}D_x^s u|_{x=0}=0,\quad j=1,\ldots,l, \tag{13}$$

где $P(D)$ принадлежит классу K, граничные операторы B_j удовлетворяют условию типа Лопатинского

$$\left(\prod_{k=1}^{l-s}\mu_k^{s+2k-r-l}\right)\cdot\det\left\|\sum_{s=0}^{m}b_{js}\lambda_j^{m-s}\right\|_{i,j=1}^{l}\neq 0\quad (L)$$

при $0\leqslant t\leqslant T$, $x=0$, а младшие коэффициенты оператора $P(D)$ удовлетворяют условию (G), а именно:
если $q=r-1-\alpha_0+|\alpha|-m\geqslant 1$, то

$$|t^{m+1-|\alpha|}a_\alpha|\leqslant c_q(\mu_1\mu_2\ldots\mu_q)'(t),$$

для остальных α, с $|\alpha|\leqslant m$

$$|a_\alpha|\leqslant c.$$

Обозначим через $H^{p,q}(\Omega)$, $H^m(\Omega_t)$ пространства Соболева с нормами $\|\cdot\|_{p,q}$ и $\|\cdot\|_m$ соответственно (см. ([8])).
Здесь $\Omega_t = \{\tau, x | \in \Omega, \tau = t\}$.

Если $f \in H^{0,N}(\Omega)$ и найдется функция $g \in H^{0,N}(\Omega)$ такая, что

$$\sum_{s=0}^{m} b_{js} D_t^{m-j} D_x^j (R^{-1} g)|_{x=0} = 0, \quad j = 1, \dots, l \tag{14}$$

$$\sum_{k=0}^{N} |D_x^k (f - g)| \leqslant c \cdot \mu_r^M, \ (t, x) \in \Omega, \tag{15}$$

то мы будем говорить, чте $f \in W$; здесь M, N—достаточно большие постоянные, зависящие от оператора P (точнее от перенумерованных постоянных, фигурирующих в условиях (8), (G) и функции $\mu(t)$).

Если при приближении к начальной полупрямой слипаются все характеристики (т. е. $r = m + 1$), то в качестве W можно взять просто класс функций $f \in H^{0,N}(\Omega)$ таких, что

$$\sum_{k=0}^{N} |D_x^k f(t, 0)| \leqslant c \cdot \mu_{m+1}^M (t). \tag{16}$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть $P(D)$-слабо гиперболический оператор класса K с гладкими коэффициентами, причем граничные операторы B_j удовлетворяют условию типа Лопатинского (L), а младшие коэффициенты оператора $P(D)$ удовлетворяют условиям (G).*

Тогда смешанная задача (11)—(13) *при $f \in W$ имеет единственное решение $u \in H^{m-1}(\Omega)$, причем имеет место оценка*

$$\|u\|_m \leqslant c \int_0^t \Big\{ \|Pu\|_{0,N} + \mu^{-M} \sup_{\substack{0<\tau<t \\ 0<k<N}} |D_x^k (f - g)| \Big\} dt + c \sup_{\substack{0<\tau<t \\ 0<k<N}} |D_x^k (f - g)| \tag{17}$$

для всех $t \in (0, T]$, $u \in H^m(\Omega_t)$, удовлетворяющих условиям (12), (13).

Как показывают примеры, условие $f \in W$ является, вообще говоря, необходимым (см. ([2])).

Приведем схему доказательства теоремы.

Используя принадлежность f к классу W задачу (11)—(13) можно свести к той же задаче с измененной правой частью ($\hat{f}$), удовлетворяющей условию

$$\hat{f}(t) = o(\mu_r^M(t)), \quad \text{при} \quad t \to +0. \tag{18}$$

Вводя, далее, энергетическую матрицу A° по формуле

$$\eta A^\circ \eta^+ = \sum_{j=1}^{m+1} |P_j(D) u|^2, \tag{19}$$

где

$$\eta = (D_t^m u,\ \ D_t^{m-1} D_x u,\ \dots,\ D_x^m u), \quad P_j(\xi_0, \xi_1) = \prod_{k \neq j} (\xi_0 - \lambda_k \xi_1)$$

нетрудно, учитывая условие (L), доказать оценку

$$\sum_{j=1}^{l} |B_j u|^2 + \sum_{j=l+1}^{m+1} |P_j u|^2 \geqslant c \eta A^\circ \eta^+, \quad \text{при } x = 0. \tag{20}$$

Проинтегрируем по Ω записанное в дивергентной форме произведение оператора $P(D)$ на разделяющий оператор. Оценивая полученное при этом интегральное равенство и используя условия на младшие коэффициенты оператора (G), получаем интегральное неравенство

$$\int_{\Omega_t} \eta A^\circ \eta^+ dx \leqslant \int_{x=0} \sum_{j=1}^{l} |B_j u|^2 dt + \int \left(c + c \frac{\mu_r'}{\mu_r} \right) \eta A^\circ \eta^+ d\Omega. \tag{21}$$

Обращая это интегральное неравенство с неинтегрируемым ядром при условии (18) (см. ([12])) получаем априорную оценку (17), из которой и вытекает теорема.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Որոշ խառը խնդիրների մասին թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար

Դիցուք տրված է բարձր կարգի հիպերբոլական հավասարում երկու անկախ փոփոխականներից, որի մի խումբ խարակտերիստիկներ ձգտում են զրոյի սկզբնական կիսաառանցքին մոտենալիս։

Հոդվածում ապացուցվում է, որ եթե եզրային պայմանները, հավասարման ցածր կարգի անդամները և աջ մասը բավարարում են որոշակի պայմանների, ապա այդ հավասարման համար խառը խնդիրը կիսաշերտում ունի միակ կայուն լուծում։

Այդ բավարար պայմանները (Լոպատինսկու տիպի և Է. Լեվիի ընդհանրացված պայմաններ) ունեն բնական բնույթ և որոշ դեպքերում հանդիսանում են նաև անհրաժեշտ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Л. Краснов*, Мат. сб. 49(91), 29—84 (1959). [2] *М. М. Смирнов*, Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, Наука, М., 1966. [3] *А. М. Нахушев*, Дифферен. уравнения, 7, № 1, 49—56 (1971). [4] *Р. Г. Айрапетян*, «Известия АН Арм. ССР», т. 12 № 1, 32—45 (1977). [5] *R. Beals*, Arch. Ration. Mech. and Anal. 48:2, 123—152 (1972). [6] *К. А. Ягджян*, „Известия АН Арм. ССР", сер. матем. т. 11 № 5, 24—31 (1976). [7] *К. А. Ягджян*, ДАН Арм. ССР, т. LXIV, № 2 (1977). [8] *J. Chazarain*, Ann. Inst. Fourier, 24:1, 173—202 (1974). [9] *Л. Гординг*, Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ., М., 1961. [10] *G. Peyser*, Journ. of Math. and Mech. 6:5, 641—653, (1957). [11] *V. Thomee*, Math. Scand. 5, 93—113, (1957). [12] *А. Б. Нерсесян*, Известия АН Арм. ССР, сер. матем. т. 9, № 2 (1968).