

УДК 519.9

МАТЕМАТИКА

А. Г. Маркосян, С. Е. Маркосян

Алгоритм разложения орграфа на орлеса

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 20/VI 1977)

В настоящей статье для орграфов рассмотрена задача, аналогичная задаче определения наименьшего числа непересекающихся по ребрам остовных лесов, на которые можно разложить обыкновенный граф G (древесность) ⁽¹⁾, и описан алгоритм нахождения некоторого такого разложения. В дальнейшем везде будем предполагать, что граф $G=(X, U)$ является 1-орграфом (графом Бержа ⁽²⁾) без петель, это означает, что из одной вершины в другую, отличную от первой, может идти не более одной дуги (ориентированного ребра), т. е. двуугольники допускаются, но параллельных дуг нет. Вершина x_0 орграфа G называется его корнем, если все цепи, начинающиеся в x_0 , представляют собой пути. Из этого определения следует, что связный оргграф G с корнем x_0 представляет собой ордереву, у которого все дуги направлены от x_0 ; такие ордеревья называются растущими ⁽²⁾. Орлесом будем называть оргграф, у которого каждая компонента связности есть растущее ордереву.

Рассмотрена следующая задача: определить наименьшее число непересекающихся по ребрам остовных орлесов (ордревность), на которые можно разложить граф Бержа без петель, и найти некоторое такое разложение. Ордревность графа G обозначим через $d(G)$. Разложение $L_1, L_2, \dots, L_{d(G)}$ графа G на $d(G)$ орлесов назовем оптимальным. Пусть $\delta(G) = \max_{x \in G} s_G^-(x)$, где $s_G^-(x)$ — полустепень захода вершины x . Ниже опишем алгоритм получения некоторого разложения графа G на не более чем $\delta(G)+1$ орлесов, откуда будет следовать следующая оценка $\delta(G) \leq d(G) \leq \delta(G) + 1$. Понятия базы вершин, бикомпоненты, базовой бикомпоненты и др., встречающиеся в алгоритме, можно найти в ⁽³⁾.

Алгоритм разложения. Пусть задан $G=(X, U)$ — граф Бержа $G_1=G$.

1. Находим базовые бикомпоненты $B_1^*, B_2^*, \dots, B_k^*$ графа G_k (алгоритм нахождения базовых бикомпонент можно найти в ⁽³⁾).

2. Выбираем произвольные вершины $b_i^k \in B_i^k$, $i = 1, 2, \dots, e_k$, ясно, что множество вершин $B_k = \{b_1^k, b_2^k, \dots, b_{e_k}^k\}$ будет базой вершин для графа G_k .

3. Принимая вершины $b_1^k, b_2^k, \dots, b_{e_k}^k$ за корни растущих деревьев, строим остоновый орлес $L_k = \{T_1^k, T_2^k, \dots, T_{e_k}^k\}$ в графе G_k так, чтобы растущее ордеререво T_i^k , $i \leq e_k$, содержало все дуги (b_i^k, x) , для $x \in \Gamma b_i^k \cap B_i^k$. Очевидно, что L_k будет содержать $|G_k| - e_k$ дуг.

4. Строим $G_{k+1} = G_k \setminus L_k$. Если G_{k+1} — пустой граф (содержит только изолированные вершины), то работа алгоритма закончена, если нет то переходим к 1-му пункту, вместо k взяв $k+1$.

После окончания работы алгоритма получим разложение $\{L_1, L_2, \dots, L_r\}$.

Теорема. *Количество шагов r описанного алгоритма разложения не превосходит $\delta(G) + 1$.*

Для доказательства теоремы покажем, что если некоторая вершина b_m является корнем в разложении $\{L_1, L_2, \dots, L_r\}$ больше одного раза, т. е. если b_m является корнем в L_i и L_j , $i < j$, то полустепень захода вершины b_m в графе G_j , $s_{G_j}^-(b_m) = 0$. Действительно, после i -го шага алгоритма вершина b_m будет принадлежать некоторой базовой бикомпоненте в графе G_j тогда и только тогда, когда эта бикомпонента состоит только из вершины b_m , следовательно $s_{G_j}^-(b_m) = 0$.

Отсюда уже следует доказательство теоремы, так как если после $(\delta(G) + 1)$ -го шага алгоритма граф $G_{\delta(G)+2}$ будет содержать дуги, скажем (x, y) , то в силу $s_{G_{\delta(G)+2}}^-(y) \neq 0$, вершина y была корнем в разложении $\{L_1, L_2, \dots, L_{\delta(G)+1}\}$ не более одного раза, следовательно, на каждом шаге алгоритма $k = 1, 2, \dots$, (может быть кроме одного) полустепень захода вершины y уменьшилась на единицу, значит $s_{G_{\delta(G)+2}}^-(y) = 0$. Так как y — произвольная, то отсюда следует: $G_{\delta(G)+2}$ является пустым графом. Теорема доказана. Из этой теоремы следует оценка для ордревесности $d(G)$.

Следствие

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \delta(G) + 1.$$

Порядок описанного алгоритма разложения равен $(\delta(G) + 1) \cdot n^2$, где n^2 — число вершин графа G .

Описанный алгоритм не всегда дает оптимальное разложение, однако, кажется можно получить оптимальное разложение, заменив только пункт 2 алгоритма на следующий пункт.

2'. Выберем вершины $b_i^k \in B_i^k$, $i = 1, 2, \dots, e_k$ таким образом, чтобы $\Gamma^{-1} b_i^k = \min_{x \in B_i^k} \Gamma_x^{-1}$.

Это утверждение пока не доказано.

Очевидно, что алгоритм разложения, в котором вместо пункта 2 взят 2', дает разложение, содержащее $\delta(G) + 1$ орлесов тогда и

только тогда, когда хотя бы одна вершина с полустепенью захода $\delta(G)$ будет выбрана корнем в каком-нибудь орлесе данного разложения. В остальных случаях алгоритм дает разложение на $\delta(G)$ орлесов. Вершина с полустепенью захода $\delta(G)$ в графе G на некотором шаге $k+1$ ($k=0, 1, \dots$) алгоритма будет выбрана корнем только тогда, когда после работы k -го шага алгоритма возникает базовая бикомпонента, полустепени захода всех вершин которой равны $\delta(G)-k \neq 0$. Весь вопрос в том, сколько орлесов содержит оптимальное разложение таких графов: $\delta(G)$ или $\delta(G)+1$, т. е. $d(G)=\delta(G)$ или $d(G)=\delta(G)+1$. Если удастся доказать, что для таких графов $d(G)=\delta(G)+1$, то алгоритм всегда дает оптимальное решение.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Ա. Գ. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ, Ս. Խ. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Օրգրաֆի օրանտառների վերլուծման ալգորիթմ

Հոդվածում նկարագրված է ալգորիթմ տրված օրգրաֆը մինիմալ քանակով օրանտառների տրոհման համար: Ինչպես հայտնի է նման խնդիր սովորական գրաֆների համար լուծված է Նեշ-Վիլյամսի կողմից (¹): Օրանտառները կազմված են աճող ծառերից: Եթե $\delta(G)$ -ով նշանակենք մտնող աղեղների մաքսիմալ լոկալ կիսաստիճանը G -գրաֆում, ապա նկարագրված ալգորիթմից հետևում է, որ մինիմալ քանակով օրանտառների քանակը, որոնցով տրոհվում է օրգրաֆը, չի գերազանցում $\delta(G)+1$: Բերված ալգորիթմի ժամանակ կատարվող գործողությունների կարգը n^2 , որտեղ n -ը տրված G գրաֆի գագաթների քանակն է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Փ. Харари, Теория графов, М., 1973. ² А. А. Зыков, Теория конечных графов, Новосибирск, 1969.