ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXV 1977 2

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян

Контактная задача для полуплоскости с внутренним вертикальным конечным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 30/VI 1977)

Задача о растяжении полуплоскости с внутренней конечной трещиной, нормальной к границе полуплоскости, исследовалась в работе М. Исиды, Е. Итагаки ([1]), где дано ее решение, которое представлено в виде ряда по степеням малого параметра. В наиболее общем случае нагрузки на берегах трещины в полуплоскости с нагруженным краем Л. Н. Карпенко ([2]) свел решение задачи к сингулярному интегральному уравнению. При действии на берега трещины нормальной самоуравновешенной нагрузки аналогичное интегральное уравнение получено В. А. Свекло ([3]). М. Исида ([4]) исследовал задачу о полуплоскости с внутренней трещиной, перпендикулярной к жестко защемленному краю полуплоскости. Г. П. Черепанов ([5]) получил замкнутое решение для аналогичной задачи, когда на границу полуплоскости действует бесконечный жесткий штамп при отсутствии трения на линии контакта.

Некоторые задачи для полуплоскости с конечным вертикальным разрезом, выходящим на границу полуплоскости, или полубесконечным вертикальным разрезом, идущим с некоторой точки полуплоскости, когда на границу полуплоскости действует или распределенная нагрузка, или конечный жесткий штамп при отсутствии трения, рассматривались в работе авторов([6,7])

Исследованию плоской смешанной задачи теории упругости для плоскости и полуплоскости с разрезом посвящено много других работ. Подробные обзоры об этих работах даются в монографии ([8]) и в сборнике ([9]).

В настоящей работе рассматривается плоская контактная задача для упругой полуплоскости с внутренним конечным разрезом, когда на полуплоскости действует конечный жесткий штамп с основанием произвольной формы, симметрично расположенный относительно оси разреза. Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. На горизонтальной границе вне штампа и на кромках разреза действует произвольное нормальное давление (рис. 1).

Решение задачи получено методом Фурье. В конечном счете решение задачи сводится к системе из парных и тройных интегральных уравнений. Эта система в свою очередь сводится к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

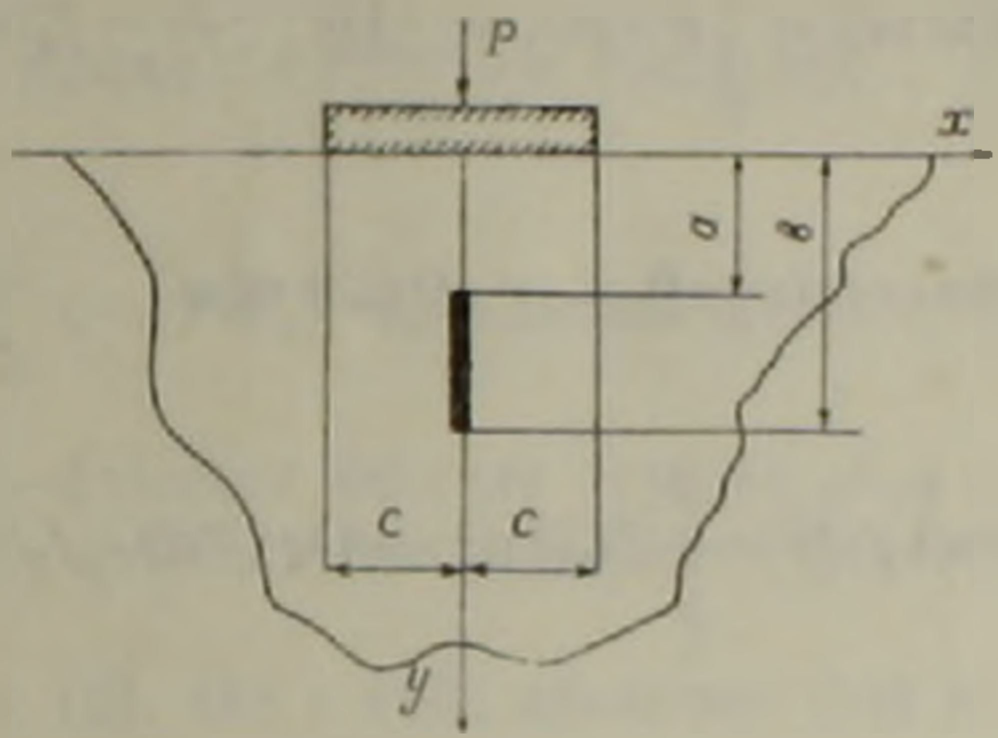

Рис. 1

В частных случаях, когда $a \to 0$ или $b \to \infty$ соответственно получаются контактные задачи плоской теории упругости для полуплоскостей с вертикальными конечным и полубесконечным разрезами ранее рассмотренные авторами (*).

В силу симметрии граничных условий достаточно рассматривать только область квадрата ($0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$), при этом граничные условия задачи будут иметь вид:

$$\tau_{xy}(x,0) = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty), \quad \tau_{xy}(0,y) = 0 \quad (0 \leqslant y < \infty) \tag{1}$$

$$u(0,y) = 0 \qquad 0 \leqslant y \leqslant a \qquad v(x,0) = f_1(x) \qquad 0 \leqslant x < c$$

$$\sigma_x(0,y) = f_2(y) \qquad a < y < b \qquad \sigma_y(x,0) = f_3(x) \qquad c < x < \infty$$

$$u(0,y) = 0 \qquad b \leqslant y < \infty \tag{2}$$

Для решения задачи бигармоническую в области $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$ функцию $\Phi(x,y)$ берем в виде суммы двух интегралов Фурье:

$$\Phi(x, y) = \int_0^\infty (1 + \alpha x) A(\alpha) e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha + \int_0^\infty (1 + \beta y)\, C(\beta) e^{-\beta y} \cos(\beta x)\, d\beta \tag{3}$$

$$(0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty)$$

Напряжения и перемещения определяются при помощи функции (3) обычными формулами (*).

Удовлетворяя граничным условиям (2) для определения функций $A(\alpha)$ и $C(\beta)$ получаем следующую систему, состоящую из следующих парных и тройных интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty \beta C(\beta)\cos(\beta x)d\beta = \frac{E}{2} f_1(x). \qquad 0\leqslant x\leqslant c \tag{4}$$

$$\int_0^\infty \beta^2 C(\beta)\cos(\beta x)d\beta = \int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)(\alpha x-1)e^{-\alpha x}d\alpha - f_3(x) \qquad c<x<\infty$$

$$\int_0^\infty \alpha A(\alpha) \cos(\alpha y)d\alpha = 0 \qquad 0\leqslant y\leqslant a$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha) \cos(\alpha y)d\alpha = \int_0^\infty \beta^2 C(\beta)(\beta y-1)e^{-\beta y}d\beta - f_2(y) \qquad a<y<b \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \alpha A(\alpha) \cos(\alpha y)d\alpha = 0. \qquad b\leqslant y<\infty$$

Подобные „парные“ и „тройные“ уравнения рассматривались в работах ([6,7,10,11]) и в других.

Используя результаты работы ([6]) из (4) для функции $c(\beta)$ получаем

$$C(\beta) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta}\int_0^c \varphi_1(r) J_1(\beta r)\,dr + \frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta}\int_c^\infty \varphi_2(r) J_1(\beta r)\,dr -$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)d\alpha \int_c^\infty r^2 K_0(\alpha r)\, J_1(\beta r)dr, \tag{6}$$

где введены следующие обозначения:

$$\varphi_1(r) = -\frac{Er}{2}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{f_1(x)dx}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad \varphi_2(r) = \int_r^\infty \frac{x f_3(x)dx}{\sqrt{x^2-r^2}}. \tag{7}$$

Следуя ([11]) и ([10]) $A(\alpha)$ ищем в виде

$$A(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}\sum_{n=1}^\infty (2n-1)A_n J_{2n-1}(b\alpha) \tag{8}$$

и из (5) получим

$$A_n = \frac{2n+1}{\sqrt{2}\pi}\int_{\varphi_1}^{\pi} P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta \int_0^{\theta}\frac{F(\varphi)d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}, \tag{9}$$

где введены следующие обозначения:

$$F(\varphi)=c_1+b\int\limits_{\varphi}^{\pi} f_2(b\sin z/2)\cos z/2dz-$$

$$-2b\int\limits_0^{\infty}\beta^2(\sin\varphi/2\,e^{-\beta b\sin\varphi/2}-e^{-\beta b})C(\beta)d\beta, \tag{10}$$

$$c_1=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n,\quad \varphi_1=2\arcsin a/b. \tag{11}$$

Здесь $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода от действительного аргумента $K_\nu(z)$ — функции Макдональда, $P_n(z)$ — полиномы Лежандра.

Имея в виду (6), (8) и (10), исключая $C(\beta)$ из (9) и произведя замену неизвестных A_n

$$(2n+1)\,G_n=\sqrt{2\pi}\,A_n, \tag{12}$$

для определения G_n получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$G_n=\Omega_n+\sum_{m=1}^{\infty}K_{mn}G_m, \tag{13}$$

где введены обозначения:

$$\Omega_n=\int\limits_{\varphi_1}^{\pi}P_n(\cos\theta)N(\theta)\sin\theta d\theta$$

$$N(\theta)=\int\limits_0^{\theta}\frac{1}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}\left[c_1-b\int\limits_{\varphi}^{\pi}\cos z/2\Psi(b\sin z/2)dz\right]d\varphi, \tag{14}$$

$$\Psi(b\sin z/2)=-f_2(b\sin z/2)+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{c}\frac{r(4b^2\sin^2 z/2+r^2)}{(b^2\sin^2 z/2+r^2)^{3/2}}\varphi_1(r)dr+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_c^{\infty}\frac{r(4b^2\sin^2 z/2+r^2)}{(b^2\sin^2 z/2+r^2)^{3/2}}\varphi_2(r)dr,$$

$$K_{mn}=\int\limits_{\varphi_1}^{\pi}P_n(\cos\theta)M_m(\theta)\sin\theta d\theta, \tag{15}$$

$$M_m(\theta)=\frac{b(4m^2-1)}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_{\theta}^{\pi}\frac{d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}\int\limits_{\varphi}^{\pi}L_m(b\sin z/2)\cos z/2\,dz,$$

$$I_m(b\sin z/2) = \int_0^\infty J_{2m-1}(b\alpha)\,d\alpha \int_c^\infty \frac{K_0(\alpha r)\,r^3(4b^2\sin^2 z/2 + r^2)}{(b^2\sin^2 z/2 + r^2)^{5/2}}. \tag{16}$$

Покажем, что система (13) регулярна. Нетрудно видеть, что

$$\int_c^\infty \frac{K_0(\alpha r)\,r^3(4b^2\sin^2 z/2 + r^2)}{(b^2\sin^2 z/2 + r^2)^{5/2}}\,dr < \frac{4}{\alpha^2 b^2\sin^2 z/2}\,K_1(\alpha b^2\sin^2 z/2),$$

$$\int_0^\infty \frac{J_{2m-1}(b\alpha)\,K_1(\alpha b^2\sin^2 z/2)}{\alpha^2}\,d\alpha < \tag{17}$$

$$< \frac{b^{2m-1}\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{3}{2}\right)}{8b^{4(m-1)}\sin^{4(m-1)} z/2\,\Gamma(2m)}\,F\left(m-\frac{1}{2},\quad m-\frac{1}{3};\ 2m;\ -\frac{1}{b^2\sin^4 z/2}\right)$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрический ряд.

Учитывая (16), (17) и используя асимптотическое разложение функции $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ и известные интегралы от тригонометрических функций и полиномов Лежандра для K_{mn} получим следующую оценку

$$K_{mn} < \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)(4m^2-1)}. \tag{18}$$

Следовательно

$$\sum_{m=1}^{\infty} |K_{mn}| < \frac{\sqrt{2}}{2n-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1} = \frac{\sqrt{2}}{2(2n-1)} < 1, \tag{19}$$

то есть система (13) вполне регулярна.

Из (14) видно, что свободные члены системы (13) ограничены сверху и при $n \to \infty$ стремится к нулю, как $O(1/n)$.

Решая систему уравнений (13) методом последовательных приближений, коэффициенты G_n можно определить с любой точностью.

После определения G_n или A_n составляется уравнение (11), которое будет линейным относительно c_1 и определится постоянная c_1. Определением c_1 неизвестные A_n будут определены полностью. Далее, по формулам (8) и (6) можно определить все неизвестные функции и, следовательно, напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Ներքին ուղղաձիգ վերջավոր ճեղքով կիսահարթության կոնտակտային խնդիր

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից վերջավոր հեռավորության վրա վերջավոր ուղղաձիգ ճեղքով թուլացված իզոտրոպ, առաձգական կիսահարթության կոնտակտային խնդիրը։

Կիսահարթության եզրին ճնշում է վերջավոր չափով ճեղքի նկատմամբ համաչափ դասավորված կոշտ դրոշմը։ Ենթադրվում է, որ շփումը՝ դրոշմի և կիսահարթության միջև բացակայում է։ Կիսահարթության եզրի վրա դրոշմից դուրս և ճեղքի ափերին ազդում է կամայական նորմալ ճնշում։

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի մեթոդով։ Խնդիրն սկզբում բերվում է զույգ և եռակի ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի, այնուհետև ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի։

Մասնավոր դեպքերում, երբ $a \to 0$ կամ $a \to \infty$ համապատասխանաբար ստացվում է հարթ առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրը կիսահարթության համար, երբ կիսահարթությունը թուլացված է եզրը դուրս եկող վերջավոր կամ կիսաանվերջ ուղղաձիգ ճեղքով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *M. Isida, Y. Itagaki* In: Proc. Oth US Nat. Congr. Appl. Mech, 2 Oxford, 1962. [2] *Л. Н. Карпенко.* Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, №4, 3-7 1965. [3] *В. А. Свекло*, Инженерный журнал, МТТ, 2, 71—76, 1966. [4] *M. Isida* Eng Fract. Mech, 2, 1, 61—89, 1970. [5] *Г. П. Черепанов*, „Известия АН СССР", ОТН, Механика и машиностроение, 4, 61—70, 1962. [6] *В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян*, ДАН Арм ССР, т. 51, №3, (1970). „Известия АН Арм ССР", механика, т. 24, №4, 3—15, (1971); „Известия АН Арм. ССР", механика, т. 25, №3 (1972). ДАН Арм. ССР. т. 57, №5, (1973). [7] *С. А Мелкумян*, ДАН Арм. ССР, т. 55, №2, (1972). [8] *В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин*, Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках, Изд. „Наукова Думка", Киев, 1976. [9] Развитие теории контактных задач в СССР. Изд. „Наука" М., 1976. [10] *А. А. Баблоян*, ДАН Арм. ССР, т. 39, №3, (1964). [11] *C. J. Tranter* Quart J. Mech and Appl. Math. vol. 4. part 3, 283—292 (1961).