

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. Л. Агаян

Об одной периодической задаче контактного взаимодействия стрингеров с упругой бесконечной пластиной, расслабленной трещинами

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 30/VI 1977)

Рассматривается периодическая контактная задача о взаимодействии тонкостенных элементов в виде стрингеров с упругой бесконечной пластиной, которая расслаблена периодической системой трещин, расположенных на одной линии. По исследованию указанного вопроса имеется довольно большое число работ, о которых упоминается в (1-3).

1. Пусть упругий лист в виде тонкой упругой пластины расслаблен периодической системой трещин вдоль отрезков $[2nL - l, 2nL + l]$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) оси Oy , а по конечным отрезкам $[-a, a]$ линий $y=2nL \pm b$ ($b \leq L, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) усилен упругими стрингерами прямоугольного поперечного сечения с малой величиной площади, имеющей толщину h и ширину d . На берегах трещины действует симметричное нормальное давление $\sigma_r(0, y) = f(y)$. Сама пластина на бесконечности растягивается по направлению оси Ox равномерно распределенными усилиями интенсивности p_0 , а на обоих концах накладок действуют растягивающие сосредоточенные силы P (на рис. 1 показан один период, когда $n=0$).

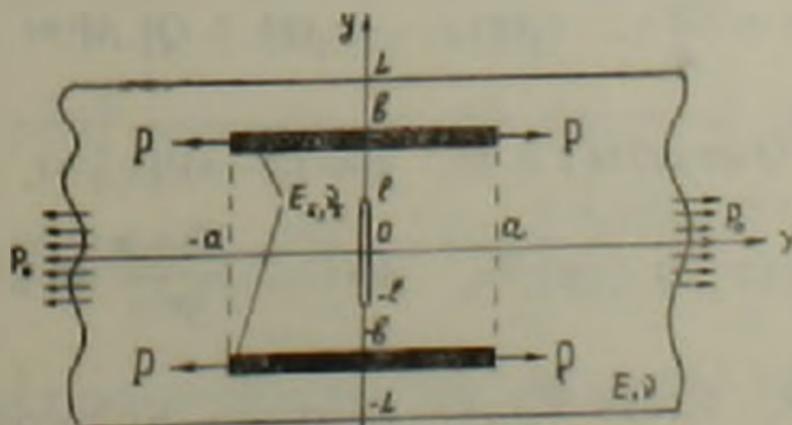


Рис. 1

При известных предположениях относительно стрингеров (1,2), сводящихся в основном к тому, что они находятся в одноосном нап-

$$u^{(1)}(x, \eta, \xi, \tau) = \frac{xQ}{\mu} \ln \left| \frac{\operatorname{sh} \lambda(x + \xi)}{\operatorname{sh} \lambda(x - \xi)} \right| + \frac{Q}{2\mu} F_1(x, \xi, \tau) + \frac{1+x}{8\mu} p_0 x. \quad (1.4)$$

где

$$F_1(x, \xi, \tau) = x \ln \frac{A^{(+)}}{A^{(-)}} + N^{(-)} - N^{(+)}$$

$$A^{(\pm)} = \operatorname{sh}^2 \lambda(x \pm \xi) + \operatorname{sn}^2 \lambda \tau, \quad N^{(\pm)} = 2\lambda(x \pm \xi) \operatorname{ch} \lambda(x \pm \xi) \left[1 + \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda(x \pm \xi)}{A^{(\pm)}} \right],$$

а для $\sigma_x^{(1)}(0, y)$ будем иметь формулу

$$\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(1)}(0, y, \xi, \tau) = \lambda Q \left\{ \left[(1+x) \operatorname{sh} 2\lambda \xi - 4\lambda \xi \operatorname{ch} 2\lambda \xi \right] \left(\frac{1}{B^{(+)}} + \frac{1}{B^{(-)}} \right) + 2\lambda \xi \operatorname{sh}^2 2\lambda \xi \left[(B^{(+)})^{-2} + (B^{(-)})^{-2} \right] \right\} + p_0 \quad (1.6)$$

$B^{(\pm)} = \operatorname{sn}^2 \lambda(y \pm \tau) + \operatorname{sh}^2 \lambda \xi$, μ — постоянная Ляме.

Соответствующие комплексные потенциалы в задаче 2 ищем в виде (4)

$$\Phi_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{G(y) d(iy)}{iy-z}, \quad \Psi_2(z) = z\Phi_2'(z), \quad (1.7)$$

где

$$G(y) = \begin{cases} f_2(y) & \text{при } 0 \leq |y| \leq l \\ g_2(y) & \text{при } l < |y| \leq L \end{cases}, \quad \int_{-l}^l G(y) dy = 0 \quad (1.8)$$

а $g_2(y)$ неизвестная периодическая функция с периодом $2L$.

Тогда для перемещения $u^{(2)}(x, y)$ будем иметь формулу

$$u^{(2)}(x, y) = u^{(2)}(x, y, \xi, \tau) = \frac{1}{8\pi\mu} \left[(1+x)\vartheta_2(x, y) - 2x \frac{\partial \vartheta_2(x, y)}{\partial x} \right], \quad (1.9)$$

где

$$\vartheta_2(x, y) = \vartheta_2(x, y, \xi, \tau) = \int_{-l}^l \ln |\operatorname{sn}^2 \lambda(y-t) + \operatorname{sh}^2 \lambda \xi| G(t) dt.$$

Удовлетворяя второму граничному условию из (1.1), получим

$$\frac{2}{\pi E} \int_{-l}^l \ln |\operatorname{sn}^2 \lambda(y-t)| G(t) dt = u^{(2)}(0, y) = \begin{cases} q_2(y), & 0 \leq |y| \leq l \\ 0, & l \leq |y| \leq L \end{cases} \quad (1.10)$$

Здесь $q_2(y)$ неизвестная периодическая функция, подчиненная условиям

$$q_2(l) = q_2(-l) = 0, \quad (1.11)$$

а E модуль упругости материала пластины.

Обращая интегральное уравнение (1.10) ⁽³⁾ и используя условия (1.8) и (1.11), для неизвестных функций $q_2(y)$ и $g_2(y)$ находим

$$q_2(y) = - \frac{1}{LE \sqrt{\cos 2\lambda y - \cos 2\lambda l}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{\cos 2\lambda t - \cos 2\lambda l}}{\sin \lambda(t-y)} f_2(t) dt, \quad (-l < y < l)$$

$$g_2(y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) = \frac{1}{2L \sqrt{\cos 2\lambda l - \cos 2\lambda y}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{\cos 2\lambda t - \cos 2\lambda l}}{\sin \lambda(t-y)} f_2(t) dt, \\ l < |y| \leq L \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в (1.7), получаем решение задачи 2, которую можно рассматривать как задачу для бесконечной пластины с периодическими трещинами, когда на берегах трещины заданы нормальные напряжения.

Теперь очевидно, что функцию влияния исходной задачи можно получить наложением решений задач 1 и 2:

$$u(x, \eta, \xi, \tau) = u^{(1)}(x, \eta, \xi, \tau) + u^{(2)}(x, \eta, \xi, \tau), \quad x \geq 0$$

где $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ даются соответственно формулами (1.4) и (1.9).

Так как $\sigma_x^{(1)}(0, y)$ ограничена вблизи концов трещины, то коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещины можно подсчитать по формуле (1.12). В частном случае, когда $\tau_1 = 0$, этот коэффициент будет

$$k = \frac{p}{L^2(1+\nu)} \sqrt{\frac{L}{\pi} \operatorname{tg} \lambda l} \left| \frac{L(1+\nu) \operatorname{ch} \lambda \xi}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \lambda \xi + \sin^2 \lambda l}} + \frac{\pi \xi \operatorname{sh} \lambda \xi \cdot \cos^2 \lambda l}{(\operatorname{sh}^2 \lambda \xi + \sin^2 \lambda l)^{3/2}} \right| + R(l, L)$$

а если $\tau_1 = L$, то

$$k = \frac{p}{L^2(1+\nu)} \sqrt{\frac{L}{\pi} \operatorname{tg} \lambda l} \left| \frac{L(1+\nu) \operatorname{sh} \lambda \xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \lambda \xi - \sin^2 \lambda l}} - \frac{\pi \xi \operatorname{ch} \lambda \xi \cdot \cos^2 \lambda l}{(\operatorname{ch}^2 \lambda \xi - \sin^2 \lambda l)^{3/2}} \right| + R(l, L),$$

где

$$R(l, L) = p_0 \sqrt{\frac{L}{\pi} \operatorname{tg} \lambda l} + \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\pi}{L \sin \lambda l}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{\cos 2\lambda t - \cos 2\lambda l}}{\sin \lambda(t-l)} f(t) dt.$$

Заметим еще, что при $\tau_1 = p_0 = f = 0$ и $l \rightarrow L$ функции (1.3) и (1.7) дают решение задачи, рассмотренной в работе ⁽⁸⁾.

2. Обращаясь теперь к поставленной выше контактной задаче, заметим, что аналогичным путем, как это сделано в работах ⁽¹⁻³⁾, ее решение можно привести к решению следующего сингулярного интегродифференциального уравнения с ядром Гильберта:

$$\int_0^a [\operatorname{cth} \lambda(\xi - x) + \operatorname{cth} \lambda(\xi + x) + K(\xi, x)] \varphi'(\xi) d\xi =$$

$$= \lambda^2 \varphi(x) - \frac{4L\mu(1+x)}{x} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{L(1+x)^2}{2x} p_0 \quad (2.1)$$

при граничных условиях

$$\varphi(a) = P, \quad \varphi(0) = P - \int_0^a \tau(s) ds, \quad (2.2)$$

где

$$K(\xi, x) = K(x, b, \xi, b) = \frac{L}{\pi x} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{4L\mu(1+x)}{x} \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

$$\varphi(x) = P - \int_x^a \tau(s) ds, \quad \varphi'(x) = \tau(x), \quad \lambda^2 = \frac{4L\mu(1+x)}{hdE_s x}$$

$\tau(x)$ — неизвестные контактные напряжения под стрингерами, E_s — модуль упругости материала стрингеров, F_1 — дается формулой (1.5), а

$$F = u^{(2)}(x, b) \quad \text{при } p = 0$$

$$F_2 = u^{(2)}(x, b) \quad \text{при } p_0 = f = 0.$$

Отметим, что первый интеграл в (2.1) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Относительно решения уравнения (2.1) заметим следующее. Если $b < l$, то функция $\varphi'(x)$ должна иметь особенности на обоих концах отрезка интегрирования, притом она имеет традиционную особенность в виде квадратичного корня при $x = a$, а при $x = 0$ порядок ее особенности меньше $1/2$. В указанном случае решения уравнения (2.1) обычно строят численными методами.

Если же $b > l$, то решение уравнения (2.1) при граничных условиях (2.2) можно представить в виде ряда

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x \sqrt{2(\operatorname{ch} 2la - \operatorname{ch} 2lx)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_{2n+1}(\operatorname{th} lx / \operatorname{th} la), \quad (2.3)$$

где $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, а $T_{2n+1}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева первого рода нечетного индекса.

Подставляя (2.3) в (2.1) и используя функциональную зависимость

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a \left[\operatorname{cth} \frac{s-x}{2} + \operatorname{cth} \frac{s+x}{2} \right] \frac{T_{2k+1} \left(\operatorname{th} \frac{s}{2} \cdot \operatorname{cth} \frac{a}{2} \right) ds}{\sqrt{2(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} s) \operatorname{ch} \frac{s}{2}}} =$$

$$= \frac{U_{2k} \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{cth} \frac{a}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

и непосредственно вытекающую из известного интегрального соотношения [7, формула—7 · 344] ($U_{2n}(x)$ — многочлены Чебышева второго рода), для определения неизвестных коэффициентов $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ получаем квази вполне регулярную (^{6.9}) бесконечную систему линейных уравнений

$$X_m + \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} X_n = a_m, \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$A_{m,n} = B_{m,n} + C_{m,n},$$

$$B_{m,n} = \frac{1}{L^2 \operatorname{th} \lambda a} \int_0^a U_{2m} \left(\frac{\operatorname{th} \lambda x}{\operatorname{th} \lambda a} \right) \frac{\chi(x, a)}{\operatorname{ch} \lambda x} dx \int_0^a K(\xi, x) \frac{T_{2n+1}(\operatorname{th} \lambda \xi \cdot \operatorname{ch} \lambda a)}{\operatorname{ch} \lambda \xi \cdot \chi(\xi, a)} d\xi,$$

$$C_{m,n} = \frac{4i^* \operatorname{th} \lambda a}{\pi^2 (2n+1)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cdot \sin(2m+1)t \cdot \sin(2n+1)t}{1 - \operatorname{th}^2 \lambda a \cdot \cos^2 t} dt,$$

$$a_m = \frac{1}{L^2 \operatorname{th} \lambda a} \int_0^a \left[i^* P - p_0 L \frac{(1+x)^2}{2x} - \frac{4L\mu(1+x)}{x} \frac{\partial F}{\partial x} \right] U_{2m} \left(\frac{\operatorname{th} \lambda x}{\operatorname{th} \lambda a} \right) \frac{\chi(x, a)}{\operatorname{ch} \lambda x} dx,$$

$$\chi(x, a) = \sqrt{2(\operatorname{ch} 2\lambda a - \operatorname{ch} 2\lambda x)}.$$

Подставляя $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ в (2.3), получаем распределение контактных напряжений под струнгерами, а по формуле (1.12) можно определить коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещины.

В заключение автор благодарит С. М. Мхитаряна за внимание к работе и ценные советы.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Կ. Լ. ԱՂԱՅԱՆ

Ճախերով բույացված անվերջ առաձգական սալի և վերադիրների կոնտակտային փոխազդեցության պարբերական մի խնդրի մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է առաձգական վերադիրների և առաձգական անվերջ սալի կոնտակտային փոխազդեցության պարբերական խնդիրը, երբ սալը թուլացված է մի գծի վրա գտնվող և վերադիրների նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված ճաքերով:

Ենթադրելով, որ վերադիրները գտնվում են միառանց լարվածային վիճակում, խնդրի լուծումը բերվում է անհայտ կոնտակտային լարումն սրտահայտող ֆունկցիայի նկատմամբ Հիլբերտի կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ-դիֆերենցիալ հավասարման:

Այդ հավասարման լուծումը փնտրվում է Չերիշևի առաջին սեռի բազմանդամներով շարքի տեսքով: Շարքի անհայտ գործակիցների որոշման

Համար ստացվում է քվարի լիովին ուղղակի դժարին հաշվարկումների ան-
վերջ համակարգ:

ЛИТЕРАТУРА — ՉՐԱՇԱԿՆԵՐՔԱՆՆԵՐ

¹ P. Муки, E. Стернберг, Прикладная механика, Тр. Америк. о-ва инж.-мех., сер. E., т. 35, № 4 (1968). ² И. X. Арутюнян, ПММ, т. 32, № 4 (1968). ³ К. Л. Агаян, «Известия АН Арм. ССР, Механика», т. 29, № 4 (1976). ⁴ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. 5, «Наука», М., 1966. ⁵ И. Я. Штерман, Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, М., 1949. ⁶ W. Engl, Der Spannungszustand einer Reihe vor Kräften, die in der unendlichen Halbane angegriffen, ZAMM, Bd 39, 1959. ⁷ И. С. Градштейн, И. М. Ризик, Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений, Изд. 4, Физматгиз, 1962. ⁸ И. X. Арутюнян, С. М. Мхитарян, ПММ №5, 1972. ⁹ К. Л. Агаян МТТ, №5, 1972.