

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Академик АН Армянской ССР Н. Х. Арутюнян, А. С. Лозовский

Об одной задаче теории вязкоупругости для тел с фазовыми превращениями

(Представлено 29/III 1977)

Исследование устойчивости горных выработок в мерзлых породах при взаимодействии их с движущимся внутри потоком теплого воздуха приводит к необходимости решения задачи о напряженном состоянии вязкоупругой среды с изменяющейся со временем поверхностью фазового перехода $S(t)$. Определение поверхности $S(t)$ и соответствующего температурного поля связано с решением задачи Стефана (1). В дальнейшем изложении поверхность $S(t)$ предполагается известной.

Будем считать, что поверхность фазового перехода разделяет среду на две области с модулями Юнга E_1, E_2 и ядрами релаксации $R_1(t-\tau), R_2(t-\tau)$ соответственно. В этом случае традиционные уравнения теории вязкоупругости требуют определенной модификации для точек образующейся фазы 2 с целью учета истории их деформирования до момента фазового перехода $\tau_1^*(\bar{x})$ в точке \bar{x} . Истинную кривую релаксации схематически можно представить так, как это показано на рис. 1 (кривая 3). Кривые 1 и 2 определяются ядрами $R_1(t-\tau)$ и $R_2(t-\tau)$ соответственно.

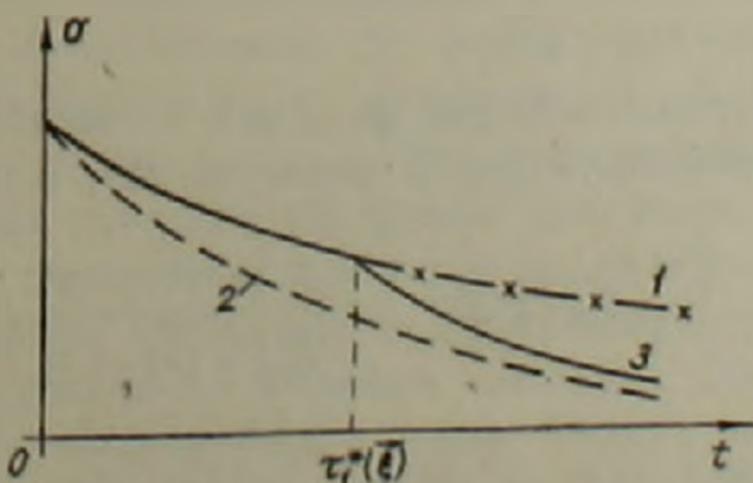


Рис. 1. Кривые, представляющие ядра $R_1(t-\tau)$, $R_2(t-\tau)$ и истинную релаксацию (кривая 3)

Для описания кривой 3 введем следующую гипотезу: истинная кривая остаточных напряжений, непрерывна и при $t > \tau_1^*(\xi)$ подобна кривой остаточных напряжений, определяемой ядром $R_2(t-\tau)$, т. е. при $t > \tau_1^*(\xi)$ может быть представлена функцией $R_2(t-\tau)\varepsilon^*(\tau)$. Условие непрерывности кривой остаточных напряжений позволяет определить $\varepsilon^*(\tau)$ в виде

$$\varepsilon^*(\tau) = \frac{R_1[\tau_1^*(\xi) - \tau]}{R_2[\tau_1^*(\xi) - \tau]} \varepsilon(\tau). \quad (1)$$

Тогда уравнение связи напряжений и деформаций в одномерном случае при $t > \tau_1^*(\xi)$ будет

$$\varepsilon(t) = E_2 \varepsilon(t) - E_1 \int_{\tau_1^*(\xi)}^{\tau_1^*(\xi)} R_2(t-\tau) \frac{R_1[\tau_1^*(\xi) - \tau]}{R_2[\tau_1^*(\xi) - \tau]} \varepsilon(\tau) d\tau - E_2 \int_{\tau_1^*(\xi)}^t R_2(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (2)$$

а для сложного напряженного состояния при простом нагружении

$$T(t) = A_2 \Gamma(t) - A_1 \int_{\tau_1^*(\xi)}^{\tau_1^*(\xi)} R_2(t-\tau) \frac{R_1[\tau_1^*(\xi) - \tau]}{R_2[\tau_1^*(\xi) - \tau]} \Gamma(\tau) d\tau - A_2 \int_{\tau_1^*(\xi)}^t R_2(t-\tau) \Gamma(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где T и Γ интенсивности тензоров напряжений и деформаций, соответственно.

Первый интеграл в формуле (3) учитывает развитие деформации до момента фазового перехода, а второй — дальнейшую историю.

Если $t \leq \tau_1^*(\xi)$, то справедливо соотношение

$$T(t) = A_1 \left\{ \Gamma(t) - \int_{\tau_1^*(\xi)}^t R_1(t-\tau) \Gamma(\tau) d\tau \right\}. \quad (4)$$

Используя известные свойства функции Хевисайда, можно объединить интегралы, фигурирующие в формуле (2), в один:

$$\varepsilon(t) = E_2 \varepsilon(t) - \int_{\tau_1^*(\xi)}^t \left\{ E_1 H[\tau_1^*(\xi) - \tau] \frac{R_1[\tau_1^*(\xi) - \tau]}{R_2[\tau_1^*(\xi) - \tau]} R_2(t-\tau) + \right. \\ \left. + E_2 H[\tau - \tau_1^*(\xi)] R_2(t-\tau) \right\} \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Введем обозначение

$$\bar{R}(t, \tau) = E_1 H(-\tau) \frac{R_1(-\tau)}{R_2(-\tau)} R_2(t-\tau) + E_2 H(\tau) R_2(t-\tau).$$

Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$\sigma(t) = E_2 \varepsilon(t) - \int_{\tau_1}^t \bar{R}[t - \tau_1^*(\xi), \tau - \tau_1^*(\xi)] \varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \geq \tau_1^*(\xi). \quad (6)$$

Интересно сравнить полученное соотношение с определяющими уравнениями для неоднородно-стареющих наследственных тел ^(2,3):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{\tau_1}^t K[t - \tau_1^*(\xi), \tau - \tau_1^*(\xi)] \sigma(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что резольвента ядра $K[t - \tau_1^*, \tau - \tau_1^*]$ имеет вид $R[t - \tau_1^*, \tau - \tau_1^*]$, где $R(t, \tau)$ резольвента ядра $K(t, \tau)$.

Поэтому из уравнения (7) непосредственно следует:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) - \int_{\tau_1}^t R[t - \tau_1^*(\xi), \tau - \tau_1^*(\xi)] \sigma(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Таким образом, соотношение (6) для тел с фазовыми превращениями и уравнение (8) для неоднородно-стареющих наследственных тел близки по структуре. Момент фазового превращения в уравнении (6) играет роль, аналогичную моменту $\tau_1^*(\xi)$ изготовления элемента среды в соотношении (8). Однако имеются и некоторые отличия. Если в (8) моменты изготовления $\tau_1^*(\xi)$ всех элементов среды должны предшествовать моменту нагружения τ_1 , то в соотношении (6) предполагается, что момент загрузки τ_1 предшествует моменту фазового перехода $\tau_1^*(\xi)$. Более того, сами истоки неоднородности различны. В теории, неоднородно-стареющих наследственных тел материал является сам по себе стареющим. Если же свойства среды инвариантны относительно сдвигов времени, то моменты изготовления элементов среды не существенны. В рассмотренном построении материал первоначально описывается разностными ядрами, а неоднородность является следствием процесса фазового превращения.

В качестве примера на основе полученных соотношений рассмотрим задачу о ползучести стенок неподкрепленной бесконечной горизонтальной горной выработки с круглым поперечным сечением радиуса a , пройденной в мерзлых породах. В процессе теплообмена мерзлых пород выработки с теплым воздухом образуется ореол оттаивания, ограниченный круговой цилиндрической поверхностью фазового перехода $S(t) > a$. В работе ⁽⁴⁾ показано, что при глубине за-

ложения выработки h ($20 \div 50$) а задача о напряженном состоянии несомой полуплоскости с отверстием может быть заменена задачей о несомой бесконечной плоскости с отверстием под действием сил горного давления.

Считая среду несжимаемой, представим граничные условия в виде:

$$\sigma_r(r, t) = -\gamma h, \quad r \rightarrow \infty \quad (9)$$

$$\sigma_r[S(t) - 0, t] = \sigma_r[S(t) + 0, t], \quad (10)$$

$$u_r[S(t) - 0, t] = u_r[S(t) + 0, t], \quad (11)$$

$$\sigma_r(a, t) = 0. \quad (12)$$

Из уравнения неразрывности, находим

$$u_r^{(i)} = \frac{c_i(t)}{r}, \quad i=1, 2 \quad (13)$$

При этом из (12) следует, что

$$c_1(t) = c_2(t). \quad (14)$$

Так как

$$\Gamma(t) = \frac{2|c_i(t)|}{r^2}, \quad (15)$$

то используя соотношения

$$e_{ij} = \frac{\Gamma}{2T} s_{ij} \quad (16)$$

и уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (17)$$

находим

$$\sigma_r(r, t) = -\frac{2}{3} \frac{aE_1}{r^2} \left\{ u_r(a, t) - \int_{\tau_1}^t R_1(t-\tau) u_r(a, \tau) d\tau \right\} - \gamma h, \quad r \geq S(t) \quad (18)$$

$$\sigma_r(r, t) = \frac{2}{3} aE_2 u_r(a, t) |a^{-2} - r^{-2}| -$$

$$- \frac{4}{3} aE_2 \int_a^r \int_{\tau_1}^{\tau_2(\xi)} R_2(t-\tau) \frac{R_1[\tau_1(\xi) - \tau]}{R_2[\tau_1(\xi) - \tau]} \frac{u_r(a, \tau)}{\xi^2} d\tau d\xi -$$

$$- \frac{4}{3} aE_2 \int_a^r \int_{\tau_1(\xi)}^t R_2(t-\tau) \frac{u_r(a, \tau)}{\xi^2} d\tau d\xi, \quad r \leq S(t) \quad (19)$$

Здесь e_{ij} , s_{ij} — компоненты дивергентов тензоров деформаций и напряжений.

Условие непрерывности напряжений (10) позволяет получить интегральное уравнение относительно функции $u_r(a, t)$

$$u_r(a, t) = \int_0^t M(t, \tau) u_r(a, \tau) d\tau - f(t). \quad (20)$$

Здесь обозначено

$$M(t, \tau) = \frac{E_1 S^{-2}(t) R_1(t-\tau) + E_1 R_2(t-\tau) K(t, \tau) + E_2 R_2(t-\tau) |a^{-2} - S^{-2}(\tau)|}{E_2 |a^{-2} - S^{-2}(t)| + E_1 S^{-2}(t)}$$

$$f(t) = \frac{3\gamma h}{2a |E_1 S^{-2}(t) + E_2 |a^{-2} - S^{-2}(t)|}$$

$$K(t, \tau) = 2 \int_0^t \frac{R_1(\lambda - \tau) S(\lambda)}{R_2(\lambda - \tau) S^2(\lambda)} d\lambda$$

Использованный здесь метод сведения задачи (9) — (12) к интегральному уравнению аналогичен методу решения задачи о напряженном состоянии цилиндра из несжимаемого вязкоупругого материала в работах (6,7). Уравнение (20), ввиду сложности его ядра, решалось численно. Результаты вычислений для ядер абелевского типа при следующих значениях параметров (5,8)

$$\delta_1 = 3,44 \text{ час}^{-0,91}, \quad \alpha_1 = 0,09, \quad E_1 = 1,67 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \delta_2 = 4,05 \text{ час}^{-0,3},$$

$$\alpha_2 = 0,7, \quad E_2 = 0,95 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$

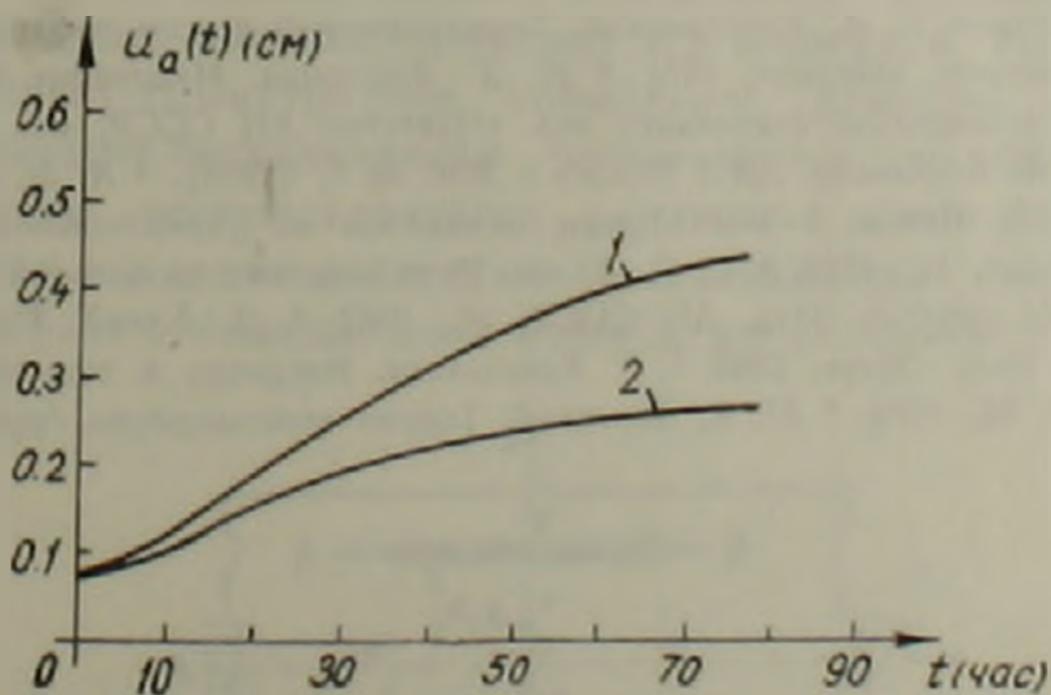


Рис. 2. Кривые, описываемые интегральным уравнением (20) при значениях параметров $\delta_1 = 3,41 \text{ час}^{-0,91}$; $\alpha_1 = 0,09$; $E_1 = 1,67 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$; $\delta_2 = 4,05 \text{ час}^{-0,3}$; $\alpha_2 = 0,7$; $E_2 = 0,95 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$. 1 — при наличии фазового перехода; 2 — при отсутствии фазового перехода

приведены на рис. 2 (кривая 1). Здесь же (кривая 2) приведено решение аналогичной задачи в отсутствие фазового перехода. Сравнение этих кривых показывает, что фазовый переход существенно ускоряет ползучесть.

Ереванский государственный университет
Институт физико-технических проблем Севера

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ա. Ս. ԼՈՂՈՎՍԿԻ

**Ֆազային ձևափոխություններով մարմինների համար
առաձգամածուցիկության տեսության մի խնդրի մասին**

Աշխատանքում կառուցվել են լարումների և դեֆորմացիաների կասյի հավասարումները տարբեր առաձգամածուցիկ հատկություններով տիրույթները բաժանող ֆազային ձևափոխության շարժվող մակերևույթով միջավայրերի համար:

Ցույց է տրվում, որ կասյի առաջարկված հավասարումները ունեն ոչ համասեռ ժառանգականորեն ծերացող մարմնի որոշիչ հավասարումների կառուցվածքին նման կառուցվածք:

Հուծվել է սահած հանրատեսակների լեռնային մշակման պատերի սողքի վերաբերյալ խնդիրը հալեցման ընթացքի դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Э. А. Бондарев, Б. А. Красовицкий, Температурный режим нефтяных и газовых скважин, Новосибирск, «Наука», 1974. ² Н. Х. Арутюнян, Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел. «Известия АН СССР, мех. тверд. тела», № 3, 1976. ³ Н. Х. Арутюнян, ДАН СССР, т. 229, № 3, (1976). ⁴ А. Н. Динник, А. Б. Моргаевский, Г. Н. Савин, В кн.: «Труды совещания по управлению горным давлением», Академиздат, М., 1938. ⁵ С. С. Вялов, Реологические свойства и несущая способность мерзлых грунтов. Изд. АН СССР, М., 1962. ⁶ Д. Бленд, Теория линейной вязкоупругости. Изд. «Мир», 1965. ⁷ Р. Кристенсен, Введение в теорию вязкоупругости. Изд. «Мир», М., 1974. ⁸ Ю. К. Зарецкий, Теория консолидации грунтов. «Наука», М., 1967.