

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Р. К. Алексанян, Ц. А. Мкртчян

Термоупругая устойчивость прямоугольной пластинки с круговым включением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 9/IV 1977)

Рассматривается задача термоупругой устойчивости составной прямоугольной пластинки с круговым включением радиуса R .

Предполагается, что пластинка и включение имеют одинаковые упругие и различные теплофизические характеристики материалов и соединены между собой при некоторой начальной температуре. Начальные напряжения и деформации в пластинке отсутствуют. Пластинка подвергается равномерному нагреву.

Составную неизогнутую пластинку с толщиной $2h$ отнесем к декартовой системе координат (x, y, z) , совмещая плоскость (x, y) со срединной плоскостью пластинки. Используется также полярная система координат (r, φ) с полюсом в центре кругового включения (рис. 1).

Рассматриваемая задача термоустойчивости приводится к интегрированию следующих дифференциальных уравнений (¹).

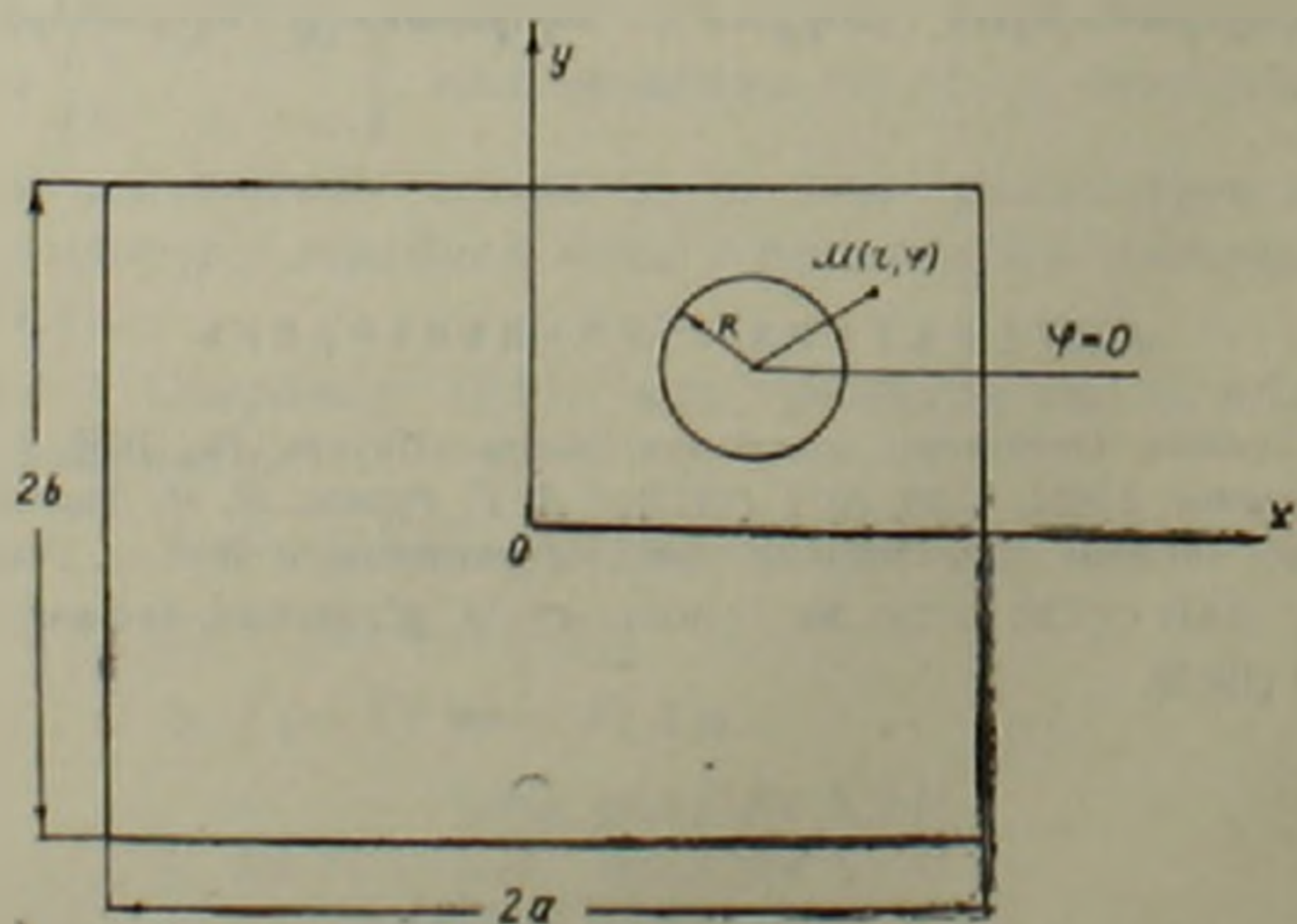


Рис. 1

$$\Delta \Delta \Phi_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$D \Delta \Delta w = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.2)$$

где Φ_i — функция напряжений для плоского напряженного состояния пластинки. Индекс $i=1$ относится к области $r < R$, а $i=2$ — к области $r > R$, w — прогиб пластинки, $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, Δ — двумерный оператор Лапласа.

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \Phi = \begin{cases} \Phi_1, & r < R \\ \Phi_2, & r > R \end{cases} \quad (1.3)$$

Зависимости между термоупругими усилиями и деформациями в полярной системе имеют вид ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} N_r^{(i)} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_r^{(i)} + \nu \varepsilon_\theta^{(i)}) - \frac{E\alpha_i}{1-\nu} N_T^{(i)}, \\ N_\theta^{(i)} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta^{(i)} + \nu \varepsilon_r^{(i)}) - \frac{E\alpha_i}{1-\nu} N_T^{(i)}, \\ N_{r\theta}^{(i)} &= \frac{2Eh}{2(1+\nu)} \gamma_{r\theta}^{(i)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь α_i — коэффициенты линейного теплового расширения, $N_T = 2hT$.

Деформации и перемещения срединной плоскости пластинки связаны формулами:

$$\varepsilon_r^{(i)} = \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta^{(i)} = \frac{u_r^{(i)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \theta}, \quad (1.5)$$

$$\gamma_{r\theta}^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(i)}}{r}.$$

Усилия выражаются через функции напряжений следующим образом:

$$N_r^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \theta^2}, \quad N_\theta^{(i)} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2}, \quad N_{r\theta}^{(i)} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right). \quad (1.6)$$

На поверхности раздела $r=R$ должны выполняться условия непрерывности усилий и перемещений ⁽²⁾

$$N_r^{(1)} = N_r^{(2)}, \quad N_{r\theta}^{(1)} = N_{r\theta}^{(2)} \quad \text{при } r=R \quad (1.7)$$

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad v_r^{(1)} = v_r^{(2)}.$$

Рассматривается два случая условий

$$\begin{aligned} \text{а) } N_{xy}^{(2)} = u_x^{(2)} = 0 & \quad \text{при } x = \pm a \\ N_{xy}^{(2)} = u_y^{(2)} = 0 & \quad \text{при } y = \pm b \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } N_{xy}^{(2)} = u_x^{(2)} = 0 & \quad \text{при } x = \pm a \\ N_{xy}^{(2)} = N_{xy}^{(2)} = 0 & \quad \text{при } y = \pm b \end{aligned} \quad (1.9)$$

Поставленная задача термоустойчивости пластинки решается в двух этапах. Вначале определяются функции напряжений Φ_i ($i=1, 2$) при контактных условиях (1.7) и при граничных условиях (1.8) или (1.9). В последующем определяется критическая температура нагрева пластинки, при которой наступает потеря устойчивости.

2. Решение уравнений (1.1) представим в виде

$$\Phi_i = \Phi_0 + F_i. \quad (2.1)$$

Здесь F_i — частные решения уравнений (1.1), удовлетворяющие контактным условиям (1.7). Бигармоническая функция Φ_0 на основании (1.8), (1.9) и (2.1) должна удовлетворять следующим граничным условиям:

в случае а)

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y}, \quad u_x^{(2)} = 0 \quad \text{при } x = \pm a \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y}, \quad u_y^{(2)} = 0 \quad \text{при } y = \pm b$$

в случае б)

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}, \quad u_x^{(2)} = 0 \quad \text{при } x = \pm a \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} \quad \text{при } y = \pm b$$

Частные решения бигармонических уравнений (1.1) представим в виде (3)

$$F_1 = \left(C_1 + C_2 \ln \frac{r}{R} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2, \quad F_2 = C_3 + C_4 \ln \frac{r}{R}, \quad (2.4)$$

которые в силу (1.4)–(1.7) должны удовлетворять условиям (4)

$$F_1 = F_2, \quad F_1' = F_2', \quad F_1'' = F_2'' + M, \quad F_1''' = F_2''' - \frac{M}{r}, \quad \text{при } r = R \quad (2.5)$$

Здесь штрих означает производную по r , $M = 2EhT(\alpha_2 - \alpha_1)$.

Удовлетворяя условиям (2.5), для F_1 , F_2 получаем выражения

$$F_1 = \frac{M}{4} r^2, \quad F_2 = \frac{MR^2}{4} \left(1 + \ln \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (2.6)$$

В декартовой системе координат для усилий имеем следующие выражения:

$$N_x^{(1)} = N_y^{(1)} = \frac{M}{2}, \quad N_{xy}^{(1)} = 0 \quad (2.7)$$

$$N_x^{(2)} = -N_y^{(2)} = \frac{MR^2}{2} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad N_{xy}^{(2)} = \frac{MR^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2.8)$$

Перемещения определяются по формулам:

$$u_x^{(i)} = \frac{1}{2Eh} \left(\int \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right) + \alpha_i x T + a_i y + b_i, \quad (2.9)$$

$$u_y^{(i)} = \frac{1}{2Eh} \left(\int \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) + \alpha_i y T + a_i x + c_i.$$

Рассмотрим симметричную составную пластинку, когда центры прямоугольника и включения совпадают.

Имеем условия симметрии:

$$u_x(0, y) = u_y(x, 0) = N_{xy}(0, y) = N_{xy}(x, 0) = 0. \quad (2.10)$$

Граничные условия (2.2) и (2.3) для рассматриваемой пластинки на основании (2.8), (2.9) преобразуются к виду

в случае а)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a} &= \frac{MaR^2 y}{(a^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} \Big|_{y=b} = \frac{MbR^2 x}{(x^2 + b^2)^2}, \\ \left(\int \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right)_{x=a} &= -2Eha\alpha_2 T + \frac{(1+\nu)MaR^2}{2(a^2 + y^2)}, \\ \left(\int \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right)_{y=b} &= -2Ehb\alpha_2 T + \frac{(1+\nu)MbR^2}{2(x^2 + b^2)}; \end{aligned} \quad (2.12)$$

в случае б)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a} &= \frac{MaR^2 y}{(a^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} \Big|_{y=b} = \frac{MbR^2 x}{(x^2 + b^2)^2}, \\ \left(\int \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right)_{x=a} &= -2Eha\alpha_2 T + \frac{(1+\nu)MaR^2}{2(a^2 + y^2)}, \\ \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} \Big|_{y=b} &= \frac{MR^2}{2} \frac{x^2 - b^2}{(x^2 + b^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Имея в виду симметричность задачи, функцию Φ_0 представим в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{\sigma_1}{2} x^2 + \frac{\sigma_2}{2} y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k y) \cos \alpha_k x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (E_k \operatorname{ch} \beta_k x + H_k \beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x) \cos \beta_k y. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.12), (2.13), для неопределенных коэффициентов σ_1 , σ_2 , A_k , D_k , E_k , H_k получим выражения: при граничных условиях а)

$$A_k = M \frac{2a_k - [(1+\nu)a_k - \sigma_k c_k](1 + b a_k \operatorname{cth} a_k b)}{2\alpha_k^2 \operatorname{sh} \alpha_k b},$$

$$D_k = M \frac{(1+\nu)a_k - \alpha_k c_k}{2\alpha_k^2 \operatorname{sh} \alpha_k b}, \quad H_k = M \frac{(1+\nu)b_k - \beta_k d_k}{2\beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k a},$$

$$E_k = M \frac{2b_k - [(1+\nu)b_k - \beta_k d_k](1 + \beta_k a \operatorname{cth} \beta_k a)}{2\beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k a},$$

$$\sigma_1 = \frac{M}{\nu - 1} \left| \frac{z_2}{z_2 - z_1} - \frac{R^2}{2ab} \left(\operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \nu \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right) \right|,$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{\nu - 1} \left| \frac{a_2}{z_2 - z_1} - \frac{R^2}{2ab} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \nu \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) \right|;$$

при граничных условиях б)

$$A_k = M \frac{g_k (z_k b \operatorname{ch} \alpha_k b + \operatorname{sh} \alpha_k b) - \alpha_k a_k b \operatorname{sh} \alpha_k b}{\alpha_k^2 (z_k b + \operatorname{sh} \alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b)},$$

$$D_k = M \frac{a_k \operatorname{ch} \alpha_k b - g_k \operatorname{sh} \alpha_k b}{\alpha_k^2 (z_k b + \operatorname{sh} \alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b)}, \quad H_k = M \frac{(1+\nu)b_k - \beta_k d_k}{2\beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k a},$$

$$E_k = M \frac{2b_k - [(1+\nu)b_k - \beta_k d_k](1 + \beta_k a \operatorname{cth} \beta_k a)}{2\beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k a},$$

$$\sigma_1 = -\frac{M}{2} \left[\frac{R^2}{a^2 + b^2} + \frac{2}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p b_p}{\beta_p} \right],$$

$$\sigma_2 = -M \left[\frac{z_2}{z_2 - a_1} + \frac{\nu}{2} \left[\frac{R^2}{a^2 + b^2} + \frac{2}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p b_p}{\beta_p} \right] - \frac{(1+\nu)R^2}{2ab} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right].$$

Здесь приняты обозначения:

$$a_k = -2R^2 \int_0^a \frac{x \sin \alpha_k x dx}{(x^2 + b^2)^2}, \quad b_k = -2k^2 \frac{a}{b} \int_0^b \frac{y \sin \beta_k y dy}{(a^2 + y^2)^2},$$

$$c_k = -(1+\nu)R^2 \frac{b}{a} \int_0^a \frac{\cos \alpha_k x dx}{x^2 + b^2}, \quad d_k = -(1+\nu)R^2 \frac{a}{b} \int_0^b \frac{\cos \beta_k y dy}{a^2 + y^2},$$

$$g_k = -\frac{R^2}{a} \int_0^a \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \cos \alpha_k x dx - \frac{(-1)^k}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\beta_p} \left\{ 2b_p - \right.$$

$$-\frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \left[2b_p + \left(1 - \frac{\alpha_k^2 - \beta_p^2}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} \operatorname{th} \beta_p a \right) (\beta_p^2 p - (1 + \nu)b_p) \right] \Bigg\}.$$

3. Подставляя найденные значения усилий N_x , N_y , N_{xy} в уравнение устойчивости (1.2), получаем дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$D\Delta\Delta w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.1)$$

В случае шарнирно-опертой по всему контуру пластинки имеем граничные условия

$$w|_{x=\pm a} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad w|_{y=\pm b} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm b} = 0. \quad (3.2)$$

Для отыскания w воспользуемся методом Бубнова—Галеркина. С этой целью изогнутую поверхность пластинки представим в виде

$$w = w_0 \cos \lambda_m x \cos \mu_n y, \quad (3.3)$$

где

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{2a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{2b} \quad (m, n = 1, 3, 5 \dots)$$

Представление (3.3) удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания.

Подставляя (3.3) в уравнение (3.1), при помощи метода Бубнова—Галеркина найдем критическую температуру, при которой пластинка теряет устойчивость.

при граничных условиях а)

$$T_{кр} = \frac{h^2}{3(1+\nu)} \frac{\lambda_m^2 + \mu_n^2}{(1 - K_{mn})\alpha_2 + \alpha_1 K_{mn}}; \quad (3.4)$$

при граничных условиях б)

$$T_{кр} = \frac{h^2}{3\lambda_m^2(1-\nu^2)} \frac{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}{(1 - Q_{mn})\alpha_2 + \alpha_1 Q_{mn}}, \quad (3.5)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} K_{mn} = & \frac{1}{2ab(\lambda_m^2 + \mu_n^2)} \left\{ R^2 \left[(\lambda_m^2 + \nu\mu_n^2) \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + (\nu\lambda_m^2 + \mu_n^2) \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1-\nu}{2} \left[b\lambda_m^2 \left(\frac{\nu}{\mu_n} b_n - 2d_n \right) + a\mu_n^2 \left(\frac{\nu}{\lambda_m} a_m - 2c_m \right) + 4(1-\nu)I_{mn} \right] \right\}, \\ Q_{mn} = & \frac{1}{2ab\lambda_m^2} \left[(1+\nu)R^2\lambda_m^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + b\lambda_m^2 \left(\frac{\nu}{2\mu_n} b_n - d_n \right) + \right. \\ & \left. + \frac{a\mu_n^2}{2\lambda_m} \frac{a_m(\operatorname{sh} 4\lambda_m b - 4b\lambda_m) - 4g_m \operatorname{sh}^2 2\lambda_m b}{4\lambda_m b + \operatorname{sh} 4\lambda_m b} + 4I_{mn} \right] - \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$-\frac{\nu\lambda_m^2 + \mu_n^2}{2\lambda_m^2} \left[\frac{R^2}{a^2 + b^2} + \frac{2}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p b_p}{\xi_p} \right],$$

$$I_{mn} = \int_0^R \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^b f_{mn}(x, y) dx dy + \int_R^a \int_0^b f_{mn}(x, y) dx dy +$$

$$+ (\lambda_m^2 + \mu_n^2) \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos^2 \lambda_m x \cos^2 \mu_n y dx dy,$$

$$f_{mn} = \frac{R^2(\lambda_m^2 - \mu_n^2)(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \cos^2 \lambda_m x \cos^2 \mu_n y - \frac{R^2 \lambda_m \mu_n xy}{(x^2 + y^2)^2} \sin 2\lambda_m x \cos 2\mu_n y.$$

В частности, когда $x_1 = x_2 = x$ или $R=0$ из формулы (3.4) и (3.5) имеем:

$$а) \quad T_{кр} = \frac{h^2(\lambda_m^2 + \mu_n^2)}{3\alpha(1+\nu)}; \quad б) \quad T_{кр} = \frac{h^2(\lambda_m^2 + \mu_n^2)}{3\alpha\lambda_m^2(1-\nu^2)}, \quad (3.7)$$

которые совпадают с результатами, полученными в работе (1).

Наибольший интерес представляют те значения m и n , при которых критическая температура (3.4) или (3.5) принимает минимальное значение. Эти значения могут быть определены из следующей системы уравнений

$$\frac{\partial T_{кр}}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial T_{кр}}{\partial n} = 0. \quad (3.8)$$

В общем случае система (3.8) может быть решена численным методом. В случае квадратной пластинки исследование показывает, что критическая температура достигает минимального значения при $m=n=1$.

На основании (3.4) проведен численный анализ критической температуры в зависимости от отношения R/a в случае $a=b$, $\nu=0,3$.

На рис. 2 изображены графики изменения минимальной критической температуры $T_{кр}^* = T_{кр}/T_{кр}^0$, ($T_{кр}^0 = \pi^2 h^2 / 6(1+\nu)\alpha_2 a^2$) в зависимости от отношения R/a при фиксированном значении x_1 для различных значений параметра $\eta = \alpha_1/\alpha_2$. В частности, значение $\eta=0,8$ соответствует случаю пластинки из сталей 30Х или 35Х и включению из стали 35ХНЗМ (для сталей 30Х и 35Х $E \cdot 10^{-6} \text{ кг/см}^2 = 2,0-2,19$, $\nu=0,24-0,33$, $\alpha_2 = \alpha_{ср} = 13,4 \cdot 10^{-6}$, для стали 35ХНЗМ $E \cdot 10^{-6} \text{ кг/см}^2 =$

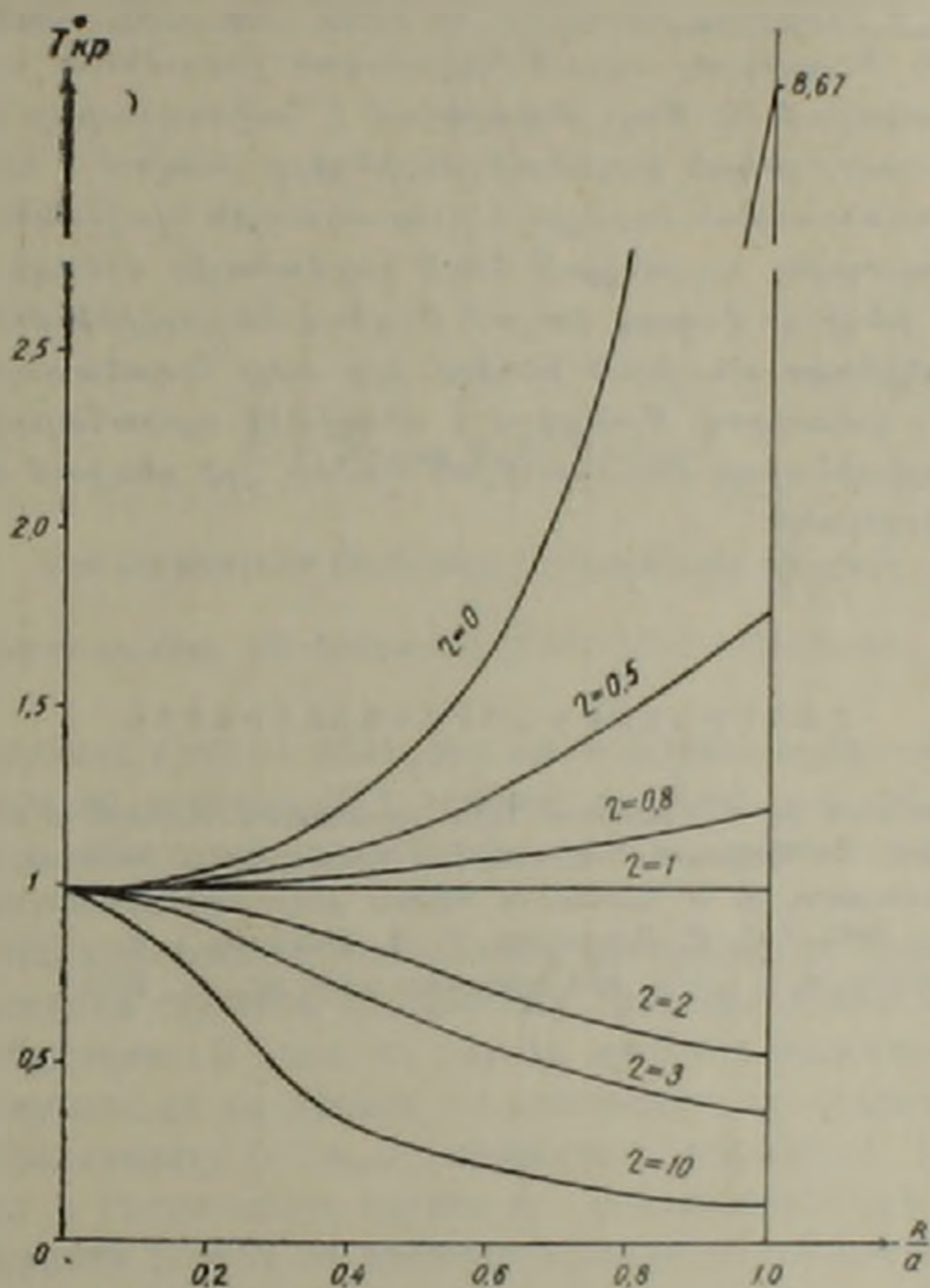


Рис. 2

$= 2,04 - 2,11$, $\alpha_1 = \alpha_{cp} = 10,8 \cdot 10^{-6}$, (⁴)) при интервале температур $20^\circ - 100^\circ\text{C}$. Как видно из рис. 2, критическая температура в зависимости от отношения R/a возрастает, когда $\eta < 1$ и убывает, если $\eta > 1$. При фиксированном R/a критическая температура уменьшается с возрастанием параметра η .

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета
Ереванский политехнический институт

Ռ. Կ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ, Մ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Շրջանային ներդրակով ուղղանկյուն սալի ջերմառածգական
կայունությունը

Աշխատանքում դիտարկվում է շրջանային ներդրակով բաղադրյալ ուղ-
ղանկյուն սալի ջերմառածգական կայունության խնդիրը:

Նյութերի միկնույն առաձգական և տարրեր ջերմային հատկություններ ունեցող սալը և ներդրակը միացված են իրար հետ որոշ սկզբնական ջերմաստիճանում: Բաղադրյալ սալում սկզբնական լարումներն ու ղեֆորմացիաները բացակայում են: Սալը ենթարկվում է հալստարաչափ տարացման:

Սալի ջերմառաձգական կայունության խնդիրը լուծվում է երկու փուլով: Սկզբում համապատասխան եղրային և կոնտակտային պայմանների դեպքում լուծվում է բաղադրյալ ուղղանկյան հարթ լարվածային վիճակի ջերմառաձգականության խնդիրը: Հաջորդ փուլում Բուքնով-Գալյորկինի մեթոդով լուծվում է սալի ջերմակայունության խնդիրը, երբ սալը հողակապորեն ամրացված է ամբողջ կոնտուրով: Ստացված է անալիտիկ արտահայտություն ջերմաստիճանի կրիտիկական տարրերության համար, որի դեպքում սալը կորցրնում է կայունությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒՅՈՒՆ

- ¹ П. М. Огибалов, В. Ф. Грибанов, Термоустойчивость пластин и оболочек, Изд. МГУ, 1968.
- ² С. А. Амбарцумян, Общая теория анизотропных оболочек, «Наука», М., 1974.
- ³ Р. К. Алексанян, М. К. Сагателян, Тезисы докладов научно-технической конференции, ЕрПИ, 1975.
- ⁴ С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман и др., Расчеты на прочность в машиностроении, т. 1, Изд. машиностроительной лит. М., 1956.