

УДК 517.8 519.9

МАТЕМАТИКА

В. Л. Даллакян

Операторы внешних сопротивлений и проводимостей линейной структуры

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 15/VII 1977)

1. J — растягивающие матрицы-функции, какой является передаточная матрица многополюсника (в конечномерном случае), рассматриваются в работах М. С. Лившица (¹), А. В. Ефимова и В. П. Потапова (²). Изучению условий существования и свойств передаточной оператор-функции и функции рассеяния линейной структуры (в бесконечном случае) посвящены работы А. Г. Руткаса и Н. И. Хиргий (^{3,4}), Хелтона (⁵).

В данной работе рассматривается аналогичная задача для оператора внешних сопротивлений и оператора внешних проводимостей линейной структуры: по этим операторам (матрицам) часто в теории электрических цепей и радиофильтров осуществляется синтез физических систем.

2. Предположим, что ориентированный граф G наделен структурой линейной цепи в сепарабельном гильбертовом пространстве Λ (⁶). Внутреннее пространство обозначается через H , а внешнее через E ($\Lambda = E \oplus H$). Известен оператор $X: H \rightarrow H$, называемый оператором внутренних сопротивлений такой, что

$$V^{in} = X I^{in}.$$

Необходимо найти условия существования и вид оператора $Z: E \rightarrow E$ такого, что

$$-V^{ex} = Z I^{ex}$$

называемого оператором внешних сопротивлений.

Необходимо, также найти условия существования и вид оператора $Y: E \rightarrow E$ такого, что

$$I^{ex} = Y(-V^{ex})$$

называемого оператором внешних проводимостей.

Для решения поставленной задачи вводится

Определение. Каркас графа называется z -каркасом (y -каркасом), если он содержит только внутренние (все внешние и еще внутренние) дуги. Каркас называется регулярным; если фундаментальные матрицы разрезов и циклов, определяемые этим каркасом, задают ограниченные операторы в пространстве Λ .

Матрица разрезов s_z и матрица циклов q_z по z -каркасу могут быть представлены в виде

$$s_z = [a_{11} \ 1 \ a_{12}], \quad q_z = \begin{bmatrix} 1 & b_{11} & 0 \\ 0 & b_{21} & 1 \end{bmatrix},$$

где первый блок-столбец соответствует внешним дугам, второй — соответствует внутренним дугам, вошедшим в z -каркас, а третий — остальным внутренним дугам.

Из блоков этих матриц можно образовать матрицы

$$\gamma = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_0 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix},$$

задающие в базисах θU^{ex} и θU^{in} операторы соответственно

$$\Gamma: E \rightarrow H, \quad S_0: H \rightarrow H, \quad Q_0: H \rightarrow H.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть для линейной структуры на графе существует регулярный z -каркас. Тогда оператор внешних сопротивлений совпадает с оператор-функцией

$$Z(X) = \Gamma^* X (Q_0 X + S_0)^{-1} \Gamma \quad (1)$$

при всяком X из области определения функции $Z(X)$.

С точки зрения синтеза цепи интересна

Теорема 2. Пусть функция $Z(X)$ представлена в виде (1) с коэффициентами, задаваемыми соответственно матрицами типа

$$\gamma = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_0 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b^* & 1 \end{bmatrix}.$$

Если матрица $[a \ 1 \ b]$, как матрица разрезов допускает реализацию в виде некоторого графа G , то эта реализация задает на графе G структуру линейной цепи с оператором внешних сопротивлений $Z(X)$.

Пусть Ω_E — оператор сопряжения, действующий в пространстве E , Ω — в пространстве H .

Теорема 3. Оператор $Z(X)$, как функция от X обладает следующими свойствами

1. $\Omega_E Z(X) \Omega_E = Z(\Omega X \Omega)$;
2. $Z^*(X) = Z(X^*)$;
3. $Z(-X) = -Z(X)$;
4. $\operatorname{Re} Z(X) = 0$, если $\operatorname{Re} X = 0$.

и при обратимости X , кроме того,

$$\operatorname{Re} Z(X) \begin{cases} \geq 0, & \text{если } \operatorname{Re} X \geq 0 \\ \leq 0, & \text{если } \operatorname{Re} X \leq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим структуру линейной цепи с изменяющейся зависимостью вида

$$V^{In}(\lambda) = X(\lambda)/I^{In}(\lambda), \quad (2)$$

где λ — комплексное число. Пусть подпространства H_r, H_l, H_c, H_g , ($H = H_r \oplus H_l \oplus H_c \oplus H_g$) приводят оператор $X(\lambda)$, который индуцирует в них операторы

$$X_r = R, \quad X_l = iL, \quad X_c = (iC)^{-1}, \quad X_g = G.$$

Линейная структура с таким оператором $X(\lambda)$ называется *rlcg* — структурой, причем пассивной *rlcg* — структурой, если операторы R, L, C положительны, а $G^* = -G$.

При таких предположениях оператор внешних сопротивлений является функцией от скалярного аргумента λ .

$$z(\lambda) = Z(X(\lambda)).$$

Следствие. Для пассивной *rlcg* — структуры оператор-функция $z(\lambda)$ обладает свойствами:

1. $\Omega_E z(\lambda) \Omega_E = z(\bar{\lambda})$;
2. $\operatorname{Re} z(\lambda) \geq 0$, если $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$.

Кроме того, для пассивной *rlc* — структуры ($H_g = 0$)

$$3. z^*(\lambda) = z(\bar{\lambda}),$$

а для пассивной *lsg* — структуры ($H_r = 0$)

$$4. \operatorname{Re} z(\lambda) \begin{cases} = 0, & \text{если } \operatorname{Re} \lambda = 0 \\ \leq 0, & \text{если } \operatorname{Re} \lambda < 0 \end{cases}$$

для пассивной *lc* — структуры ($H_r = 0, H_g = 0$)

$$5. z(-\lambda) = -z(\lambda)$$

для пассивной *rl* — структуры ($H_c = 0, H_g = 0$)

$$6. \operatorname{Im} z(\lambda) \begin{cases} \geq 0, & \text{если } \operatorname{Im} \lambda > 0 \\ = 0, & \text{если } \operatorname{Im} \lambda = 0 \\ \leq 0, & \text{если } \operatorname{Im} \lambda < 0 \end{cases}$$

для пассивной *rc* — структуры ($H_l = 0, H_g = 0$)

$$7. \operatorname{Im} z(\lambda) \begin{cases} \leq 0, & \text{если } \operatorname{Im} \lambda > 0 \\ = 0, & \text{если } \operatorname{Im} \lambda = 0 \\ \geq 0, & \text{если } \operatorname{Im} \lambda < 0 \end{cases}$$

Необходимое условие существования оператора внешних сопротивлений задает

Теорема 4. Пусть для линейной структуры на графе существует оператор внешних сопротивлений $Z(X)$. Тогда этот граф обладает z — каркасом.

3. Перейдя к вопросу существования оператора внешних проводимостей, отметим, что матрица разрезов s_y и матрица циклов q_y по y — каркасу могут быть представлены блочными матрицами

$$s_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{y4} \\ 0 & 1 & a_{44} \end{bmatrix}, \quad q_y = \begin{bmatrix} b_{44} & b_{44} & 1 \end{bmatrix},$$

где первый блок-столбец соответствует внешним дугам, второй — соответствует внутренним дугам, вошедшим в y — каркас, а третий — остальным внутренним дугам.

Матрицы, образованные из блоков матриц s_y и q_y ,

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{44} \end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix} 1 & a_{44} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{44} & 1 \end{bmatrix}$$

задают в базисах $\mathcal{U}^{ex}$ и $\mathcal{U}^{in}$ операторы, соответственно

$$\Gamma_1: E \rightarrow H, \quad S_1: H \rightarrow H, \quad Q_1: H \rightarrow H$$

Теорема 5. Пусть для линейной структуры на графе существует регулярный y — каркас. Тогда оператор внешних проводимостей совпадает с оператор-функцией.

$$Y(X) = \Gamma_1^*(Q_1 X + S_1)^{-1} \Gamma_1 \quad (3)$$

для всякого X из области определения функции $Y(X)$.

Теорема 6. Пусть функция $Y(X)$ представлена в виде (3) с коэффициентами, задаваемыми соответственно матрицами

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a^* & 1 \end{bmatrix}$$

Если матрица $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -b^* \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, как матрица разрезов, допускает реализацию в виде некоторого графа G , то эта реализация задает на графе G структуру линейной цепи с оператором внешних проводимостей $Y(X)$.

Теорема 7. Оператор $Y(X)$, как функция от X , обладает следующими свойствами

$$1. \quad \Omega_E Y(X) \Omega_E = Y(\Omega X \Omega);$$

$$2. \quad Y^*(X) = Y(X^*);$$

$$3. \quad Y(-X) = -Y(X);$$

$$4. \quad \operatorname{Re} Y(X) \begin{cases} \geq 0, & \text{если } \operatorname{Re} X \geq 0 \\ = 0, & \text{если } \operatorname{Re} X = 0 \\ \leq 0, & \text{если } \operatorname{Re} X \leq 0 \end{cases}$$

Когда структура линейной цепи имеет изменяющуюся зависимость типа (2), оператор внешних проводимостей является функцией от λ

$$y(\lambda) = Y(X(\lambda)).$$

Для пассивной $rlcg$ — структуры $y(\lambda)$ обладает теми же свойствами, что и оператор-функция $z(\lambda)$.

Теорема 8. Пусть для линейной структуры на графе существует оператор внешних проводимостей $Y(X)$. Тогда этот граф обладает y — каркасом.

Таким образом, условия существования и вид оператора внешних сопротивлений $Z(X)$ и оператора внешних проводимостей $Y(X)$ тесно связаны с геометрией линейной структуры.

В заключении выражаю признательность А. Г. Руткасу за постановку задачи и внимание при выполнении работы.

Армянский научно-исследовательский
институт энергетики

Վ. Լ. ԴԱՎԱՅԱՆ

Գծալին կառուցվածքի արտաքին դիմադրությունների և
հաղորդակցությունների սպեռատորներ

Կողմնորոշված դրաֆի համար, որը ստացված է գծալին շղթալի կառուցվածքով, դիտարկվում են արտաքին դիմադրությունների Z և արտաքին հաղորդակցությունների Y սպեռատորները. նրանց գոյությունը պայմանները ստացված են Z և Y սպեռատորների արտահայտությունները՝ ներքին դիմադրությունների X սպեռատորի միջոցով: Նկարագրված են $Z(X)$ և $Y(X)$, ինչպես նաև $z(\lambda) = Z(X(\lambda))$, $y(\lambda) = Y(X(\lambda))$ (գծալին կառուցվածքի փոփոխական կախվածության դեպքում), սպեռատոր-ֆունկցիաների հատկությունները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. С. Лившиц, Операторы, колебания, волны «Наука», М., 1966, ² А. В. Ефимов, В. П. Погачев, УМН, т. 28, № 1 (1973), ³ А. Г. Руткас, Н. Н. Хирсман, Сб. Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. Вып. 3, Харьков, 1974, ⁴ А. Г. Руткас, ДАН СССР, т. 230, № 1 (1976), ⁵ J. W. Helton, Indiana Univ. Math. J., v. 22, № 5 (1972).