ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXV 1977 2

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

С. Г. Овсепян

# Построение всех бикомпактных и всех тихоновских расширений топологических пространств

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. А. Александряном 19/VI 1977)

В 1939 г. П. С. Александров [1] предложил новый метод построения расширений топологических пространств, широко известный в литературе под названием метода центрированных систем открытых множеств и применил его, в частности, к новому построению стоун-чеховского расширения произвольного вполне регулярного пространства. Этот метод позволил П. С. Александрову и многим его последователям получить фундаментальные результаты в теории расширений топологических пространств (см. например [1-5]).

Применяя в несколько видоизмененном виде метод центрированных систем открытых множеств и комбинируя его с понятием близости в смысле В. А. Ефремовича, Ю. М. Смирнов [3] впервые описал все бикомпактные расширения произвольного вполне регулярного пространства.

Построение всех бикомпактных расширений произвольного вполне регулярного пространства получено и в работе [4] методом, основанным на понятии „подчинения".

В настоящей заметке, используя введенное П. С. Александровым понятие вполне регулярной центрированной системы открытых множеств [1,5] и применяя подходы работы [6], строятся все тихоновские и в частности все бикомпактные расширения произвольного тихоновского пространства. Кроме того обобщаются также известные результаты, приведенные в работах [7-9].

Определения приводимых здесь понятий можно найти, например, в работах [10,11].

Псевдотопологическое пространство (п. т. п.) $\{\Phi, P\}$ назовем регулярным, если для любого $\varphi \in \Phi$ и для любого $p \in \varphi$ существует $p_0 \in \varphi$ такое, что если $\psi \in \Phi$ и $p \in \psi$, то существует $q \in \psi$ такое, что $p_0 \dot{\cap} q = \Theta_P$, где $\dot{\cap}$ — знак псевдопересечения, а $\Theta_P$ наименьший элемент псевдотопологии $P$.

Пусть $(X, V)$ топологическое пространство и $X_0 = \{V_x : x \in X\}$, где $V_x$ система всех открытых окрестностей точки $x \in X$. Тогда

$[X_0, V]$ п. т. п. Легко видеть, что если $(X, V)$ — регулярное топологическое пространство, то $[X_0, V]$ — регулярное п. т. п.

Как и в ($^6$) рассмотрим отображение $F$, которое каждому п. т. п. $[\Phi, P]$, сопоставляет топологическое пространство $(\Phi, W) = F[\Phi, P]$, где топология $W$ порождена базой, образованной подмножествами $\Phi$ вида $W_p = [\varphi : p \in \varphi]$, когда $p$ пробегает все $P$.

Предложение 1. *Для любого п. т. п. $[\Phi, P]$ такого, что $\Phi$ покрывает $P$ $F[\Phi, P]$ является регулярным топологическим пространством тогда и только тогда, когда $[\Phi, P]$ регулярное п. т. п.*

Определение. Открытый фильтр $\varphi$ топологического пространства $X$ называется вполне регулярным фильтром этого пространства, если для любого $v \in \varphi$ найдется $v_0 \in \varphi$ и непрерывная на $X$ функция $f$ со значениями в замкнутом интервале $[0, 1]$ такая, что $f(x) = 0$ при $x \in v_0$ и $f(x) = 1$ при $x \in X \setminus v$.

Вполне регулярный фильтр $\varphi$ пространства $X$ называется вполне регулярным ультрафильтром, если $\varphi$ не содержится ни в каком, отличном от себя вполне регулярном фильтре пространства $X$.

Открытый фильтр пространства $X$ называется свободным, если он лишен точек прикосновения в $X$.

Лемма 1. *Пересечение бикомпактного множества свободных открытых фильтров топологического пространства $X$ является свободным открытым фильтром пространства $X$.*

Лемма 2. *Пересечение бикомпактного множества вполне регулярных фильтров произвольного пространства $X$ является вполне регулярным фильтром пространства $X$.*

Каждая пара $[U, D]$, где $U$ — некоторое непустое множество свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства $X$, а $D$ — некоторое разбиение множества $U$ на бикомпактные подмножества, порождает систему $\Phi_{[U, D]} = [\varphi_d : d \in D]$, где $\varphi_d = \bigcap [u : u \in d]$, которая в силу лемм 1 и 2 состоит из свободных вполне регулярных фильтров пространства $X$.

В случае, когда $U$ совпадает с множеством $\bar{U} = \bar{U}(X)$ всех свободных вполне регулярных ультрафильтров пространства $X$ систему $\Phi_{[U, D]}$ будем обозначать через $\Phi_D$.

Теорема 1. *Пусть $A$ произвольное открытое покрытие тихоновского пространства $X$ такое, что каждый свободный вполне регулярный ультрафильтр пространства $X$ содержит некоторый элемент из $A$. Тогда $A$ содержит конечное подпокрытие пространства $X$.*

Следствие 1. *Тихоновское пространство $X$ бикомпактно тогда и только тогда, когда всякий его вполне регулярный ультрафильтр сходится.*

Следствие 2. *Пусть $(X, V)$ тихоновское пространство и $D$ произвольное разбиение множества $\bar{U}(X)$ на бикомпактные под-*

*множества. Тогда $F[X_0 \cup \Phi_D, V]$ является $H$ — замкнутым расширением пространства $(X, V)$.*

Следствие 3. *Каждый свободный открытый ультрафильтр тихоновского пространства $X$ содержит некоторый свободный вполне регулярный ультрафильтр пространства $X$.*

Разбиение $D$ множества $\tilde{U}(X)$ на бикомпактные подмножества назовем согласованным, если для любого $\psi \in X_0 \cup \Phi_D$ и для любого $v \in \psi$ существует $v_0 \in \psi$ такое, что если $\varphi \in \Phi_D$ и $v \in \varphi$, то каждый вполне регулярный ультрафильтр пространства $X$, содержащий $\varphi$, не содержит $v_0$.

Разбиение $D$ произвольного непустого подмножества $U$ множества $\tilde{U}(X)$ на бикомпактные подмножества назовем согласованным, если существует согласованное разбиение $D'$ множества $\tilde{U}(X)$ такое, что $D \subset D'$. При этом $[U, D]$ будем называть согласованной парой пространства $X$.

Лемма 3. *Для любого бикомпактного множества $U$ свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства $X$ разбиение $D$ множества $U$ является согласованным тогда и только тогда, когда для любого $\varphi \in \Phi_{[U,D]}$ и для любого $v \in \varphi$ существует $v_0 \in \varphi$ такое, что если $\psi \in \Phi_{[U,D]}$ и $v \in \psi$, то ни один вполне регулярный ультрафильтр пространства $X$, содержащий $\psi$, не содержит $v_0$.*

Лемма 4. *Пусть $U$ некоторое множество свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства $X$ и $D$ — такое разбиение множества $U$ на бикомпактные подмножества, что все элементы разбиения $D$ кроме, может быть, конечного числа, одноточечные подмножества множества $U$. Тогда $D$ — согласованное разбиение множества $U$.*

Предложение 2. *Для любой согласованной пары $[U, D]$ тихоновского пространства $(X, V)$ $[X_0 \cup \Phi_{[V,D]}, V]$ является регулярным п. т. п..*

Теорема 2. *Для любой согласованной пары $[U, D]$ тихоновского пространства $(X, V)$ пространство $F[X_0 \cup \Phi_{[U,D]}, V]$ является тихоновским расширением пространства $(X, V)$. Оно является бикомпактным расширением пространства $(X, V)$ тогда и только тогда, когда $U$ совпадает с множеством всех свободных вполне регулярных ультрафильтров пространства $(X, V)$.*

Доказательство части теоремы, касающейся бикомпактных расширений непосредственно следует из следствия 2 теоремы 1 и из предложений 1 и 2.

Следствие. *Если $U = \tilde{U}(X)$, а $D$ — разбиение на одноточечные подмножества, то, очевидно, $\Phi_D = \tilde{U}(X)$, поэтому $F[X_0 \cup \tilde{U}, V]$ — бикомпактное расширение.*

Теорема 3. *Для каждого тихоновского расширения $[Y, f]$ пространства $(X, V)$ существует единственная согласованная пара*

$[U, D]$ *пространства* $(X, V)$ *такая, что* $F|X_0 \cup \Phi_{[U,D]}, V|$ *эквивалентно расширению* $|Y, f|$.

Таким образом, в силу теорем 2 и 3, множество всех построенных выше расширений $F|X_0 \cup \Phi_{[U,D]}, V|$ тихоновского пространства $(X, V)$, когда $[U, D]$ пробегает всевозможные согласованные пары, совпадает, с точностью до эквивалентности расширений, с совокупностью всех тихоновских расширений пространства $(X, V)$, а множество всех $F|X_0 \cup \Phi_D, V|$, когда $D$ пробегает всевозможные согласованные разбиения множества $\bar{U}(X)$, совпадает (с точностью до эквивалентности расширений) с совокупностью всех бикомпактных расширений пространства $(X, V)$, причем различные пары порождают различные (неэквивалентные) расширения.

Зафиксируем теперь некоторое множество $U$ свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства $(X, V)$ и обозначим через $B_U(X)$ множество всех тихоновских расширений $X_{[U,D]} = F|X_0 \cup \Phi_{[U,D]}, V|$ пространства $(X, V)$, когда $D$ пробегает всевозможные согласованные разбиения множества $U$. В случае, когда $D$ является разбиением множества $U$ на одноточечные подмножества, расширение $X_{[U,D]}$ будем обозначать через $\beta X_U$.

Из сказанного выше следует, что $B_U(X)$ совпадает с множеством $B(X)$ всех бикомпактных расширений пространства $(X, V)$ тогда и только тогда, когда $U$ совпадает с множеством всех свободных вполне регулярных ультрафильтров пространства $(X, V)$.

На множестве $B_U(X)$ рассмотрим отношение порядка, при котором $Y > Z$, если существует непрерывное отображение пространства $Y$ в $Z$, тождественное на $X_0$.

Лемма 5. *Для любых двух расширений* $Y = X_{[U,D_1]}$ *и* $Z = X_{[U,D_2]}$ $Y > Z$ *тогда и только тогда, когда разбиение* $D_1$ *вписано в* $D_2$.

Следствие 1. *Расширение* $\beta X_U$ *является наибольшим элементом частично упорядоченного множества* $B_U(X)$.

Следствие 2. *Построенное выше бикомпактное расширение* $\beta X_{\bar{U}} = F|X_0 \cup \bar{U}, V|$ *тихоновского пространства* $(X, V)$ *является его стоун-чеховским расширением.*

Отметим, что описанный в этой заметке метод построения расширений, в части касающейся построения стоун-чеховского расширения, полностью совпадает с методом центрированных систем открытых множеств П. С. Александрова (см. [1,5]).

Теорема 4. *Пусть* $U$ *произвольное бикомпактное множество свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства* $(X, V)$. *Тогда для любых двух расширений* $Y$ *и* $Z$ *из* $B_U(X)$ $Y > Z$ *в том и только в том случае, когда* $Z$ *является фактор-пространством пространства* $Y$, *соответствующим не-*

*прерывному разбиению $Y$ на бикомпактные подмножества, при котором $X_0$ разбивается на одноточечные подмножества, при этом фактор-отображение неприводимо и совершенно. Кроме того для любого расширения $Y$ из $B_U(X)$ фактор-пространство пространства $Y$, соответствующее разбиению такого же типа, является расширением пространства $(X, V)$, принадлежащим $B_U(X)$.*

Следствие. *Для любого бикомпактного множества $U$ свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства $X$ расширение $Y$ этого пространства принадлежит $B_U(X)$ тогда и только тогда, когда $Y$ является фактор-пространством пространства $\beta X_U$, соответствующим такому непрерывному разбиению $\beta X_U$ на бикомпактные подмножества, при котором $X_0$ разбивается на одноточечные подмножества.*

Теорема 5. *Для любого бикомпактного множества $U$ свободных вполне регулярных ультрафильтров тихоновского пространства $(X, V)$ частично упорядоченное множество $B_U(X)$ образует полную решетку.*

Учитывая, что множество всех свободных вполне регулярных ультрафильтров локально бикомпактного пространства $X$ бикомпактно, из следствия теоремы 4 и из теоремы 5 в частности получаются известные результаты, приведенные в работах [7,8].

Пусть $K_1$ и $K_2$-категории, определенные следующим образом: $\mathrm{Ob}(K_1)$ (соответственно $\mathrm{Ob}(K_2)$) состоит из наростов расширений $\beta X_U$ (соответственно из решеток $B_U(X)$), когда $X$ пробегает все небикомпактные тихоновские пространства, в $U$ — все (кроме двухэлементных) бикомпактные подмножества множества всех свободных вполне регулярных ультрафильтров пространства $X$, $\mathrm{Mor}(K_1)$ — гомеоморфизмы, а $\mathrm{Mor}(K_2)$ — изоморфизмы.

Теорема 6. *Между категориями $K_1$ и $K_2$ существует изоморфизм такой, что образом объекта $\beta X_U \setminus X$ служит $B_U(X)$.*

Следствие 1. *Пусть $U$ и $U'$ произвольные бикомпактные множества свободных вполне регулярных ультрафильтров соответственно тихоновских пространств $X$ и $Y$. Решетки $B_U(X)$ и $B_{U'}(Y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны наросты тихоновских расширений $\beta X_U$ и $\beta Y_{U'}$.*

Следствие 2. *Для любого, за исключением двухэлементного, бикомпактного множества $U$ свободных вполне регулярных ультрафильтров произвольного тихоновского пространства $X$ группа гомеоморфизмов пространства $\beta X_U \setminus X$ изоморфна группе автоморфизмов решетки $B_U(X)$.*

Следствие 3. *Для любого бикомпактного множества $U$ свободных вполне регулярных ультрафильтров произвольного тихоновского пространства $X$ существует локально бикомпактное пространство $Y$ такое, что $B_U(X)$ изоморфна $B(Y)$.*

В следствиях 1 и 2 теоремы 6, предполагая $X$ и $Y$ локально бикомпактными и взяв в качестве $U$ и $U'$ все свободные вполне регулярные ультрафильтры соответственно пространств $X$ и $Y$, получим известные результаты К. Д. Магилла ([9]).

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

## Տոպոլոգիական տարածությունների բոլոր բիկոմպակտ և բոլոր տիխոնովյան լայնացումների կառուցումը

*Օգտագործելով Պ. Ս. Ալեքսանդրովի կողմից մտցված բաց բազմությունների լիովին ռեգուլյար կենտրոնացված սիստեմի գաղափարը և կիրառելով հեղինակի կողմից նախկինում առաջադրված մոտեցումները, որոնք թույլ տվեցին կառուցել կամայական տոպոլոգիական տարածության բոլոր H-փակ և բոլոր հաուսդորֆյան լայնացումները, ներկա հոդվածում տրվում է կամայական տիխոնովյան տարածության բոլոր բիկոմպակտ և բոլոր տիխոնովյան լայնացումները կառուցելու մեթոդ։*

*Լիովին ռեգուլյար տարածության Ստոուն—Չեխյան լայնացումը կառուցելիս այդ մեթոդը համընկնում է Պ. Ս. Ալեքսանդրովի կողմից առաջարկված բաց բազմությունների կենտրոնացված սիստեմների մեթոդի հետ։*

*Բացի դրանից, տիխոնովյան լայնացումների համար ընդհանրացվում են նաև ([7–9]) հոդվածներում բերված գլխավոր արդյունքները։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. С. Александров*, Матем. сборн., 5 (47). 403 (1939). [2] *S. Fomin*, Ann. Math. 44. 471 (1943). [3] *Ю. М. Смирнов*, Матем. сборн., 31, 543 (1952). [4] *П. С. Александров, В. Пономарев*. ДАН СССР, т. 121, №4, 575 (1958) [5] *С. Илиадис, С. Фомин*, УМН, 21, №4. 47 (1966). [6] *С. Г. Овсепян* ДАН СССР т. 224, №4, 764 (1975). [7] *N. Boboc, ch. Stretchi*, Bull. Math. soc. sci., Math. Phys., R. P. Roumanie, Y. 5 (53), 155 (1961). [8] *O. Njastad*, J. London Math. Soc., 40, 526 (1965). [9] *K. D. Magill jr.*, Proc. London Math. Soc., (3) v. 18, 231 (1968). [10] *С. Г. Овсепян*, ДАН СССР т. 206, №4, 819 (1972). [11] *С. Г. Овсепян*, "Известия АН Арм. ССР," математика, т. 8, №3, 235 (1973).