ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXV 1977 2

УДК 513836

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян

Гомотопическая инвариантность бесконечномерных гомотопических групп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 12/V 1977)

Результаты, приведенные в [1], позволяют доказать гомотопическую инвариантность бесконечномерных гомотопических групп $\Pi_q(X)$ [2] и бесконечномерных групп компактного типа $\Pi_q^c(X)$ [3] подмножеств X вещественного сепарабельного гильбертова пространства H в классе K_0 отображений подмножеств пространства H, введенном В. Г. Болтянским [4]. Другими словами, если линейно связанные подмножества X и Y пространства H гомотопически эквивалентны в классе K_0, то имеют место изоморфизмы

$$\Pi_q(X)\approx\Pi_q(Y) \quad \text{и} \quad \Pi_q^c(X)\approx\Pi_q^c(Y).$$

Будем рассматривать категории W и W^c объектами, каждой из которых служат всевозможные пары (X, x_0), где $X\subset H$, т. е. подмножества с отмеченными точками пространства H; морфизмами категории W являются непрерывные отображения $f:(X, x_0)\to(Y, y_0)$, принадлежащие классу K_0, а морфизмами категории W^c являются непрерывные отображения $f:(X, x_0)\to(Y, y_0)$, принадлежащие классу K_0 и обладающие тем свойством, что для каждого компактного множества $M\subset(Y-\{y_0\})$ прообраз $f^{-1}(M)$ компактен и на этом прообразе терминальная производная отображения f отлична от нуля [3].

Предложение 1. Всякий морфизм $f:(X, x_0)\to(Y, y_0)$ категории W индуцирует гомоморфизм $f_*:\Pi_q(X, x_0)\to\Pi_q(Y, y_0)$ для всякого целого q причем, если $g:(Y, y_0)\to(Z, z_0)$ тоже такой морфизм, то $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$. Аналогично, всякий $f:(X, x_0)\to(Y, y_0)$ категории W^c индуцирует гомоморфизм $f:\Pi_q^c(X, x_0)\to\Pi_q^c(Y, y_0)$, причем $(g\circ f)_*^c=$ $=g_*^c\circ f_*^c$.

Замечание. В силу этого предложения пара $(\Pi_q(X, x_0), f_*)$ (соответственно пара $(\Pi_q^c(X, x_0), f_*^c)$) представляет собой ковариантный функтор из категории W (соответственно из категории W^c) в категорию абеловых групп и их гоморфизмов.

Пусть, снова, X и Y — произвольные подмножества гильбертова пространства H, R — числовая прямая, а I — ее единичный отрезок $[0, 1]$.

Определение. Непрерывное отображение $f, g: X \to Y$ будем называть гомотопными в классе K_0 или короче K_0—гомотопными, если существует связывающая их гомотопия $f_t: X \to Y$, $0 \leq t \leq 1$, обладающая тем свойством, что при любом t отображение f_t принадлежит классу K_0 и отображение $F: I \times X \to Y$, задаваемое по формуле $F((t, x)) = f_t(x)$ принадлежат классу K_0 в гильбертовом пространстве $H^* = R \times H$; каждую такую гомотопию f_t будем называть K_0-гомотопией связывающей f с g.

Замечание. Если от K_0-гомотопии f_t требовать, чтобы при любом t прообраз $f_t^{-1}(M)$ каждого компактного множества $M \subset Y$ был компактен и на этом прообразе терминальная производная ${}'f_t(x)$ отображения f_t была отлична от нуля, то ее мы будем называть K_0^c-гомотопией, связывающей f с g; при этом сами отображения f и g будут называться K_0^c-гомотопными.

Лемма. *Пусть* $f, g: X \to Y$ K_0-*гомотопные отображения,* $f_t: X \to Y$, $0 \leq t \leq 1$, *некоторая связывающая их* K_0-*гомотопия,* $x_0 \in X$ — *произвольная точка и* $\sigma: I \to Y$ *путь в* Y, *определяемый по формуле* $\sigma(t) = f_t(x_0)$, $0 \leq t \leq 1$; *пусть, далее,*

$$f_*: \Pi_q(X, x_0) \to \Pi_q(Y, f(x_0)),$$

$$g_*: \Pi_q(X, x_0) \to \Pi_q(Y, g(x_0)) -$$

гоморфизмы, индуцированные соответственно морфизмами $f(X, x_0) \to (Y, f(x_0))$ *и* $g: (X, x_0) \to (Y, g(x_0))$ *категории* W *(см. предложения* I*), а*

$$\sigma_*: \Pi_q(Y, g(x_0)) \to \Pi_q(Y, f(x_0)) -$$

изоморфизм индуцированный (¹) *путем* σ. *Тогда имеет место равенство* $f_* = \sigma_* \circ g_*$, *т. е. имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi_q(X, x_0) \arrow[dl, "g_*"'] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\Pi_q(Y, g(x_0)) \arrow[rr, "\sigma_*"] & & \Pi_q(Y, f(x_0))
\end{tikzcd}$$

Замечание. Сформулированная лемма остается справедливой Если рассматривать бесконечномерные гомотопические группы компактного типа, а K_0-гомотопии заменить K_0^c—гомотопиами, а именно, имеет место равенство $f_*^c = \sigma_*^c \circ g_*^c$.

Замечание. Из этой леммы, в частности, следует, что если f_t является K_0-гомотопией (соответственно K_0^c-гомотопией) относительно точки x_0, т. е. $f_t(x_0) = f(x_0)$ при любом t, то $f_* = g_*$ (соответственно $f_*^c = g_*^c$) ибо σ_* (соответственно σ_*^c) — будучи автоморфизмом, порожденным постоянным путем σ в точке $f(x_0) = g(x_0)$ будет тождественным автоморфизмом группы $\Pi_q(Y, f(x_0))$ (соответственно группы $\Pi_q^c(Y, f(x_0))$).

Определение. Подмножество X и Y гильбертова пространства будем называть K_0-гомотопически эквивалентными (соответственно K_0^c-гомотопически эквивалентными), если существуют принадлежащие классу K_0 отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to X$ такие, что композиции $g \circ f: X \to X$ и $f \circ g Y \to Y$ K_0-гомотопны (соотв. K_0-гомотопны) соответствующим тождественным отображениям. При этом f и g называются гомотопически взаимообратными K_0-гомотопическими эквивалентностями (соотв. K_0^c-гомотопическими эквивалентностями).

Основным результатом этой статьи является следующая теорема о K_0-гомотопической инвариантности бесконечномерных групп.

Теорема. *Если линейные связные множества X и Y из H K_0-гомотопически эквивалентны (соотв. K_0^c-гомотопически эквивалентны), то имеют место изоморфизмы: $\Pi_q(X) \approx \Pi_q(Y)$ (соотв. $\Pi_q^c(X) \approx \Pi_q^c(Y)$), а именно, всякая K_0-гомотопическая эквивалентность (соотв. K_0^c-гомотопическая эквивалентность) $f: X \to Y$ индуцирует изоморфизм $f_*: \Pi_q^c(X, x_0) \to \Pi_q^c(Y, f(x_0))$ (соотв. изоморфизм $f_*^c: \Pi_q^c(X, x_0) \approx \Pi_q^c(Y, f(x_0))$) для любой точки $x \in X$ и любого целого q.*

Замечание. Приведенные выше все понятия и результаты определяются и доказываются для бесконечномерных относительных гомотопических групп $\Pi_q(X, A)$ и $\Pi_q^c(X, A)$, построенных в (3).

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

Անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբերի հոմոտոպիական ինվարիանտությունը

Հիմնվելով (1) հոդվածում բերված արդյունքների վրա, հնարավոր է դառնում ապացուցել իրական սեպարաբել հիլբերտյան H տարածության X ենթաբազմությունների $\Pi_q(X)$ և $\Pi_q^c(X)$ անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբերի (2), (3) հոմոտոպիական ինվարիանտությունը H տարածության ենթաբազմությունների արտապատկերումների Վ. Գ. Բոլտյանսկու կողմից մտցված K_0 դասում (4)։

Այլ կերպ ասած, տեղի ունի հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ։ Եթե X և Y հանդիսանում են H տարածության K_0-հոմոտոպորեն համարժեք (համապ. K_0^c-հոմոտոպորեն համարժեք) գծորեն կապակցված ենթաբազմություններ, ապա տեղի ունեն $\Pi_q(X) \approx \Pi_q(Y)$ և $\Pi_q^c(X) \approx \Pi_q^c(Y)$ իզոմորֆիզմները։

Նույն արդյունքը մնում է ճիշտ նաև անվերջ չափանի հարաբերական համոտոպիկ խմբերի ([5]) համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. А. Мирзаханян*, ДАН Арм. ССР. т. LXIV, № 5 (1977). [2] *Э. А. Мирзаханян*, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем. т. VIII, № 2 (1973). [3] *Э. А. Мирзаханян*, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем., т. X, № 2 (1975). [4] *В. Г. Болтянский*, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем., IX, № 2, 1974, 107—120. [5] *Э. А. Мирзаханян*, ДАН Арм. ССР. т. LVIII, № 1 (1974).