ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXV 1977 1

УДК 530.145

ФИЗИКА

М. Г. Арутюнян, Г. С. Погосян, В. М. Тер-Антонян

## Прохождение частицы через параболический потенциальный барьер

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 13/XII 1976)

Одним из методов, используемых при отыскании квазиклассических формул связи, т. е. правил сопоставления ВКБ-решений, справедливых в областях, лежащих далеко от точки поворота, является так называемый комплексный метод [1,2]. В рамках этого метода волновая функция формально рассматривается как функция комплексного переменного, а переход из одной области квазиклассичности в другую производится по пути, целиком расположенному вдали от точки поворота. Строгое обоснование комплексного метода и его применение к задаче о прохождении частицы через параболический барьер было дано в работе Кэмбла [3].

Цель настоящей статьи — дать точное решение этой задачи и проследить за тем, как оно переходит в квазиклассические результаты Кэмбла.

Введем „затравочный" потенциал $U(x, \lambda)$, определенный следующим образом:

$$U(x,\lambda)=\begin{cases} -\dfrac{k\lambda^2}{2}, & -\infty<x\leqslant-\lambda \\ -\dfrac{kx^2}{2}, & -\lambda\leqslant x\leqslant\lambda \\ -\dfrac{k\lambda^2}{2}, & \lambda\leqslant x<\infty \end{cases}$$

В областях $-\infty<x\leqslant-\lambda$ и $\lambda\leqslant x<\infty$ волновая функция имеет вид:

$$\Psi_1=e^{ik_1x}+Ae^{-ik_1x},$$

$$\Psi_2=Ce^{ik_1x},$$

где

$$k_1=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\left(E+\frac{k\lambda^2}{2}\right)}.$$

Для нахождения волновой функции при $-l < x < l$ необходимо решить уравнение Шредингера

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{kx^2}{2}\right)\Psi_2 = 0. \tag{1}$$

Введем безразмерные величины $\xi$ и $\varepsilon$

$$\xi = x\left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{1/4}, \quad \varepsilon = \frac{E}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

и перепишем уравнение (1) в переменной $\xi$

$$\frac{d^2\Psi_2}{d\xi^2} + (2\varepsilon + \xi^2)\Psi_2 = 0. \tag{2}$$

Легко показать, что уравнение (2) может быть приведено к уравнению для вырожденной гипергеометрической функции

$$z\frac{d^2F}{dz^2} + \left(\frac{1}{2} - z\right)\frac{dF}{dz} - \left(\frac{1}{4} - i\frac{\varepsilon}{2}\right)F = 0,$$

если волновую функцию представить в виде $\Psi_2 = e^{i\xi^2/2}F(\xi)$ и ввести новую переменную $z = -i\xi^2$. Тогда волновая функция $\Psi_2$ запишется следующим образом:

$$\Psi_2 = e^{i\xi^2/2}\left\{C_1F\left(\frac{1}{4} - i\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}, -i\xi^2\right) + C_2(-i\xi^2)^{1/2}F\left(\frac{3}{4} - i\frac{\varepsilon}{2}, \frac{3}{2}, -i\xi^2\right)\right\}. \tag{3}$$

Волновая функция $\Psi$ и ее первая производная должны быть непрерывны во всем пространстве. Это стандартное требование приводит к условиям сшивки

$$\begin{gathered}\Psi_1(-\xi_0) = \Psi_2(-\xi_0), \quad \Psi_1'(-\xi_0) = \Psi_2'(-\xi_0),\\ \Psi_3(\xi_0) = \Psi_2(\xi_0), \quad \Psi_3'(\xi_0) = \Psi_2'(\xi_0),\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\xi_0 = l\left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{1/4}.$$

Так как в дальнейшем мы собираемся переходить к большим $\xi_0$, то вместо явного вида функции $\Psi_2$ и ее производной используем их асимптотики при больших по модулю значениях переменной $\xi$.

Известно, что единственного асимптотического разложения для функции $F(a, c, z)$ при $|z| \to \infty$ не существует, если даже в комплексной плоскости иметь в виду совершенно определенное направление, вдоль которого переменная $z$ стремилась бы к бесконечности. Когда аргумент $\varphi$ комплексной переменной $z$ лежит в интервалах $(-\pi, 0)$ и $(\pi, 2\pi)$ асимптотическое разложение вырожденной гипергеометрической функции выглядит так:

$$F(a,\ c,\ z) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,|z|^{a-c}\, e^{i(a-c)\varphi}\, e^{z} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}\,|z|^{-a} e^{-ia(\pi+\varphi)},$$

$$F(a,\ c,\ z) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,|z|^{a-c}\, e^{i(a-c)(\varphi-2\pi)}\, e^{z} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}\,|z|^{-a} e^{ia(\pi-\varphi)}. \qquad (5)$$

Это необычное поведение асимптотического разложения называется явлением Стокса [4].

В интересующем нас случае в роли $z$ выступает переменная $-i\xi^2$, аргумент которой при вещественных $\xi$ равен $-\pi/2$ ($\xi>0$) и $3\pi/2$ ($\xi<0$) и, следовательно, справедливо асимптотическое разложение (5). Учитывая также, что при вычислении производной $\psi_2'$ достаточно ограничиться дифференцированием быстропеременных множителей, перепишем условия сшивки (4) в виде:

$$\begin{gathered} e^{-i\alpha\xi_0} + Ae^{i\alpha\xi_0} = C_1(M+M^*) - C_2(T-iT^*), \\ i\alpha e^{-i\alpha\xi_0} - i\alpha Ae^{i\alpha\xi_0} = i\xi_0 C_1(M-M^*) - i\xi_0 C_2(T+iT^*), \\ Ce^{i\alpha\xi_0} = C_1(M+M^*) + C_2(T-iT^*), \\ i\alpha Ce^{i\alpha\xi_0} = -i\xi_0 C_1(M-M^*) - i\xi_0 C_2(T+iT^*), \end{gathered} \qquad (6)$$

где $\alpha = k_1(\hbar^2/mk)^{1/4}$ и

$$M = \frac{e^{-i(\xi_0^2/2+\varepsilon\ln\xi_0-\pi/8)}}{\xi_0^{1/2}}\ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4-i\varepsilon/2)},$$

$$T = \frac{e^{-i(\xi_0^2/2+\varepsilon\ln\xi_0-\pi/8)}}{\xi_0^{1/2}}\ \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4-i\varepsilon/2)}.$$

Из полученной системы уравнений (6) следует, что

$$A = \frac{e^{-2i\alpha\xi_0}}{2}\left(\frac{1+ie}{1-ie} + \frac{1-ip}{1+ip}\right),$$

$$C = e^{-2i\alpha\xi_0}\left(\frac{1}{1+ip} - \frac{1}{1-ie}\right),$$

причем

$$e = i\,\frac{\xi_0}{\alpha}\,\frac{iT-T^*}{iT+T^*}, \quad p = -i\,\frac{\xi_0}{\alpha}\,\frac{M-M^*}{M+M^*}.$$

Очевидно, что амплитуды $A$ и $C$ удовлетворяют условию сохранения числа частиц, т. е. равенству:

$$|A|^2 + |C|^2 = 1.$$

Если ввести параметры $\delta_1$ и $\delta_2$ согласно

$$\delta_1 = \frac{\xi_0^2}{2} + \varepsilon\ln\xi_0 - \frac{\pi}{8} + \arg\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4} - i\,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\},$$

$$\delta_2 = \frac{\xi_0^2}{2} + \varepsilon\ln\xi_0 + \frac{\pi}{8} + \arg\left\{\Gamma\left(\frac{3}{4} - i\,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\},$$

то можно придти к следующей формуле для коэффициента прозрачности

$$D = \frac{\alpha^2 \xi_0^2}{1+e^{-2\pi\varepsilon}} (\alpha^2 \cos^2\delta_1 + \xi_0^2 \sin^2\delta_1)^{-1} (\alpha^2 \sin^2\delta_2 + \xi_0^2 \cos^2\delta_2)^{-1}. \qquad (7)$$

Коэффициент отражения определится из условия сохранения числа частиц.

В пределе бесконечно больших $\xi_0$ параметр $\alpha \approx \xi_0$ и выражение (7) переходит в формулу

$$D = \frac{1}{1+e^{-2\pi\varepsilon}}, \qquad (8)$$

полученную Кэмблом.

Задача о прохождении частицы через параболический потенциальный барьер может быть решена и без введения „затравочного“ потенциала, причем корректно вычисленные значения коэффициентов прозрачности и отражения в точности оказываются равными квазиклассическим.

Действительно, решение уравнения (1) при $\xi \to \pm\infty$ согласно (5) можно записать в виде:

$$\psi(\xi) \xrightarrow{\xi \to \pm\infty}$$

$$|\xi|^{-1/2 - i\varepsilon} e^{i\xi^2/4} e^{-\pi\varepsilon/4} e^{-i\pi/2} \left| \frac{C_1 \Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 - i\varepsilon/2)} \pm \frac{C_2 \Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4 - i\varepsilon/2)} \right| +$$

$$+ |\xi|^{-1/2 + i\varepsilon} e^{-i\xi^2/4} e^{-\pi\varepsilon/4} e^{i\pi/2} \left| \frac{C_1 \Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 + i\varepsilon/2)} \mp i \frac{C_2 \Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4 + i\varepsilon/2)} \right|. \qquad (9)$$

Для волн, описываемых первым и вторым слагаемыми выражения (9), проекция потока $j$ вдоль направления $\xi$ равна

$$j_\xi^{(1)} = -\frac{\hbar}{m} \xi \left| \frac{C_1 \Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 - i\varepsilon/2)} \pm \frac{C_2 \Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4 - i\varepsilon/2)} \right|^2,$$

$$j_\xi^{(2)} = \frac{\hbar}{m} \xi \left| \frac{C_1 \Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 + i\varepsilon/2)} \mp i \frac{C_2 \Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4 + i\varepsilon/2)} \right|^2.$$

Будем считать, что частица падает на барьер слева. Тогда из выражения для потока $j_\xi^{(1)}$ следует, что первое слагаемое в (9) при $\xi \to -\infty$ описывает падающую волну, а при $\xi \to +\infty$ — нефизическую волну, распространяющуюся из $+\infty$ к нулю. Аналогично убеждаемся, что второе слагаемое при $\xi \to +\infty$ описывает прошедшую волну, а при $\xi \to -\infty$ — отраженную. Отсюда следует, что для выделения из общего решения (9) частного, соответствующего задаче о прохождении частицы через потенциальный барьер, необходимо потребовать, чтобы

$$\frac{C_1\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 - i\varepsilon/2)} + \frac{C_2\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4 - i\varepsilon/2)} = 0,$$

$$e^{i\pi/8} e^{-\pi\varepsilon/4} \left| \frac{C_1\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 - i\varepsilon/2)} - \frac{C_2\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4 - i\varepsilon/2)} \right| = 0,$$

$$A = e^{-i\pi/8} e^{-\pi\varepsilon/4} \left| \frac{C_1\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 + i\varepsilon/2)} + i\,\frac{C_2\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4 + i\varepsilon/2)} \right|.$$

$$C = e^{-i\pi/8} e^{-\pi\varepsilon/4} \left| \frac{C_1\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4 + i\varepsilon/2)} - i\,\frac{C_2\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4 + i\varepsilon/2)} \right|.$$

Находя $C_1$ и $C_2$ и подставляя их значения в выражения для $A$ и $C$ получаем:

$$A = 1/2\, e^{-i\pi/4} \left| \frac{\Gamma(1/4 - i\varepsilon/2)}{\Gamma(1/4 + i\varepsilon/2)} - i\,\frac{\Gamma(3/4 - i\varepsilon/2)}{\Gamma(3/4 + i\varepsilon/2)} \right|,$$

$$C = 1/2\, e^{i\pi/4} \left| \frac{\Gamma(1/4 - i\varepsilon/2)}{\Gamma(1/4 + i\varepsilon/2)} + i\,\frac{\Gamma(3/4 - i\varepsilon/2)}{\Gamma(3/4 + i\varepsilon/2)} \right|. \qquad (10)$$

Значения коэффициентов отражения и прозрачности, вычисленные из выражения (10), в точности совпадают с результатом (8), полученным из квазиклассических формул связи.

Заметим, что если в качестве $U(x, l)$ выбрать функцию, тождественно равную нулю при $|x| > l$, то значение параметра $\alpha$ в (7) меняется, и при больших $\xi_0$ формула (7) не переходит в результат Кэмбла Это говорит о чувствительности предельного результата к выбору „затравочного" потенциала.

Нам приятно поблагодарить Г. С. Саакяна и участников семинара Кафедры теоретической физики ЕГУ за полезные обсуждения.

Ереванский государственный университет

Մ. Հ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Գ. Ս. ՊՈՂՈՍՅԱՆ, Վ. Մ. ՏԵՐ-ԱՆՏՈՆՅԱՆ

## Մասնիկի անցումը պարաբոլիկ պոտենցիալ արգելքով

*Հոդվածում ճշգրիտ լուծված է պարաբոլիկ պոտենցիալ արգելքով մասնիկի անցման խնդիրը։ Մտցվում է օժանդակ պոտենցիալ, որը $|x| < l$ տիրույթում հավասար է սկզբնականին, հաստատուն է $|x| \geq l$ տիրույթում, և անընդհատ է ողջ իրական առանցքի վրա։ $l$ պարամետրը հետագայում ձգտեցվում է անվերջության։ Օժանդակ պոտենցիալի օգտագործումը հնարավորություն է տալիս մասնիկի վարքը $|x| > l$ տիրույթում նկարագրել հարթ ալիքների լեզվով, իսկ $|x| < l$ տիրույթում ալիքային ֆունկցիան արտահայտել*

այլասերված հիպերերկրաչափական ֆունկցիաների օգնությամբ։ Առաջարկված է նաև լուծման ալտերնատիվ եղանակ (առանց օժանդակ պոտենցիալի մտցման), որտեղ անվերջությունում մասնիկներն ազատ չեն։ Այս եղանակում անդրադարձման և անցման գործակիցները ճշգրիտ համընկնում են քվազիդասականի հետ։ Երկու դեպքում էլ այլասերված հիպերերկրաչափական ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ վերլուծությունում օգտագործված է Ստոքսի երևույթը։

## ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *M. V. Berry and K. E. Mount* „Semiclassical aproximation in wave mechanics", Reports on Progress in Physics, Volume 35, Number 4, 1972. [2] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Квантовая механика, М., 1974. [3] *E. C. Kemble*, Phys. Rev., 48, 1935. [4] *Ф. М. Морс, Г. Фешбах*. Методы теоретической физики, т. 2, М., 1960.