

УДК 539.3.01

# ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. Арутюнян

## Смешанная плоская задача теории упругости для области, ограниченной двумя дугами окружностей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 31/1 1977)

Настоящая работа посвящается решению смешанной задачи плоской теории упругости для области, ограниченной двумя дугами пересекающихся окружностей. На одной дуге окружности заданы граничные условия в напряжениях, а на другой — в перемещениях.

В биполярной координатной системе, при помощи автоморфных функций задача приводится к краевой задаче Римана-Гильберта, которая в свою очередь в общем случае приводится к разрешимой системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Получено уравнение, первый корень которого характеризует поведение напряжений около угловой точки.

Задачи, относящиеся к однородным и составным луночкам, рассматривались в (1-4) и в других работах. Насколько известно, задачи исследуемого типа для круговой луночки ранее не рассматривались.

1. В биполярной координатной системе поперечное сечение цилиндрического тела занимает область  $\beta_1 < \beta < \beta_2$ ;  $-\infty < x < \infty$  (рис. 1).

Задача решается при помощи функции напряжений  $\Phi(x, \beta)$ , которая удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) (g\Phi) = 0, \quad (1.1)$$

где  $g = \frac{\operatorname{ch} x + \cos \beta}{a}$  — характеризует масштаб преобразования.

Напряжения и перемещения через  $\Phi(x, \beta)$  выражаются следующими формулами (1,2):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left( g \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\operatorname{ch} x}{a} \right) (g\Phi); \\ \sigma_\beta &= \left( g \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\cos \beta}{a} \right) (g\Phi); \end{aligned}$$

$$\tau_3 = -g \frac{\partial^2 (g\Phi)}{\partial x \partial \beta};$$

$$u = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left( \frac{\partial (g\Phi)}{\partial x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + \cos \beta} g\Phi \right) - \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial (g\Psi)}{\partial \beta} + \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} x + \cos \beta} g\Psi \right);$$

$$v = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left( \frac{\partial (g\Phi)}{\partial \beta} + \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} x + \cos \beta} g\Phi \right) + \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial (g\Psi)}{\partial x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + \cos \beta} g\Psi \right), \quad (1.2)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ляме, а  $\Psi(x, \beta)$  — бигармоническая функция, связанная с  $\Phi(x, \beta)$  формулой

$$g\Psi(x, \beta) = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \iint \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right) (g\Phi) dx d\beta. \quad (1.3)$$

На линии  $\beta = \beta_2$  заданы граничные условия в напряжениях, которые равносильны следующим условиям для функции напряжений:

$$(g\Phi(x, \beta))|_{\beta=\beta_2} = \tau_1(x); \quad \frac{\partial (g\Phi(x, \beta))}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_2} = \tau_2(x). \quad (1.4)$$

На линии  $\beta = \beta_1$  заданы перемещения:

$$u(x, \beta_1) + iv(x, \beta_1) = u_0(x) + iv_0(x). \quad (1.5)$$

Предполагается, что  $\tau_k(x)$  ( $k=1, 2$ ),  $u_0(x)$  и  $v_0(x)$  удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

Функцию  $\Phi(x, \beta)$  ищем в виде интеграла Фурье

$$g\Phi(x, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \beta) e^{-itx} dt, \quad (1.6)$$

где

$$f(t, \beta) = A_1(t) \operatorname{ch} t(\beta_2 - \beta) \cos(\beta - \beta_1) + A_2(t) \operatorname{ch} t(\beta - \beta_1) \cos(\beta_2 - \beta) + \\ + A_3(t) \operatorname{sh} t(\beta_2 - \beta) \sin(\beta - \beta_1) + A_4(t) \operatorname{sh} t(\beta - \beta_1) \sin(\beta_2 - \beta). \quad (1.7)$$

Введем обозначение:

$$f(t, \beta_1) = tX_1(t); \quad \frac{\partial f(t, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} = tX_2(t). \quad (1.8)$$

Условия (1.4) приводят к двум независимым системам двух уравнений для определения искоемых функций  $A_k(t)$  ( $k=1-4$ ) через  $X_k(t)$  ( $k=1, 2$ )

$$A_1 = \frac{1}{\Delta_2} (tX_1 \operatorname{ch} t\gamma - \bar{\tau}_1 \cos \gamma); \quad A_2 = \frac{1}{\Delta_2} (\bar{\tau}_1 \operatorname{ch} t\gamma - tX_1 \cos \gamma); \quad (1.9)$$

$$A_3 = \frac{1}{\Delta_1} (F_1 \operatorname{sh} t\gamma - tF_2 \sin \gamma); \quad A_4 = \frac{1}{\Delta_1} (F_2 \operatorname{sh} t\gamma - tF_1 \sin \gamma),$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \text{sh}^2 t\gamma - t^2 \sin^2 \gamma; \quad \Delta_2 = \text{sh}^2 t\gamma - \sin^2 \gamma; \quad \gamma = \beta_2 - \beta_1 \\ F_1 &= tX_2 + tA_1 \text{sh } t\gamma - A_2 \sin \gamma \\ F_2 &= -\varphi_2 - A_1 \sin \gamma + tA_2 \text{sh } t\gamma.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Функции  $\bar{\varphi}_k(t)$  являются преобразованиями Фурье функции  $\varphi_k(x)$

$$\bar{\varphi}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) e^{itx} dx \quad (k=1, 2) \quad (1.11)$$

Условия (1.5) дают возможность определить неизвестные  $X_k(t)$  ( $k=1, 2$ ). Удовлетворяя условию (1.5), получаем функциональное сингулярное интегральное уравнение

$$A_{11}(t) P_1(t) + e^{-2it\beta_1} A_{12}(t) P_1(-t) = \frac{B_{11}(t)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E'(\tau) P_1(\tau)}{E(\tau) - E(t)} d\tau + N(t) \quad (1.12)$$

или характеристическую систему сингулярных интегральных уравнений

$$\sum_{m=1}^2 A_{km}(t) P_m(t) = \frac{B_{11}(t)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E'(\tau) P_k(\tau)}{E(\tau) - E(t)} d\tau + N_k(t) \quad (k=1, 2) \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned}P_1 &= e^{it(\beta_1 - \pi)} (tX_1(1 - a_{21}) + X_2(1 - a_{22}) + b_2); \quad P_2(t) = e^{-2it\beta_1} P_1(-t); \\ A_{11} &= (a_{22} - 1)(a_{11} + ta_{21}) - t(a_{21} + 1)(a_{12} + a_{22}); \quad A_{22}(t) = A_{11}(-t); \\ A_{12} &= e^{2it\beta_1} ((a_{22} - 1)(a_{11} + ta_{21}) - t(a_{21} - 1)(a_{12} + a_{22})); \quad A_{21}(t) = A_{12}(-t); \\ N_1 &= 2e^{it(\beta_1 - \pi)} ((a_{22} - 1)b_1 - t(a_{12} + 1)b_2 + (a_{22} - 1)(\bar{u}_0 + \bar{v}_0)); \\ B_{11} &= -2i(a_{22} - 1); \quad N_2(t) = e^{-2it\beta_1} N_1(-t); \quad E = e^{2it\gamma};\end{aligned}$$

$$a_{11} = -t - \frac{\nu_0}{\Delta_1} t(t^2 + 1) \sin^2 \gamma; \quad a_{12} = -\frac{\nu_0}{2\Delta_1} (\text{sh } 2t\gamma - t \sin 2\gamma); \quad (1.14)$$

$$a_{21} = \frac{\nu_0}{\Delta_1} (\text{sh } 2t\gamma + t \sin 2\gamma); \quad a_{22} = 1 + \frac{\nu_0}{\Delta_1} t^2 \sin^2 \gamma;$$

$$b_1 = \frac{\nu_0}{\Delta_1} (\bar{\varphi}_2(t \text{ch } t\gamma \sin \gamma - \text{sh } t\gamma \cos \gamma) - \bar{\varphi}_1(t^2 + 1) \text{sh } t\gamma \sin \gamma);$$

$$b_2 = -\frac{\nu_0}{\Delta_1} (\bar{\varphi}_2 \text{sh } t\gamma \sin \gamma - \bar{\varphi}_1(t \text{ch } t\gamma \sin \gamma + \text{sh } t\gamma \cos \gamma));$$

$$\bar{u}_0 = 2(\lambda + \mu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \sin tx dx; \quad \bar{v}_0 = 2(\lambda + \mu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) \cos tx dx;$$

$$\nu_0 = 2 + \frac{\lambda}{\mu}.$$

2. Интегральные уравнения (1.13) сведем к краевой задаче Римана-Гильберта (2-10).

Нетрудно заметить, что  $E(z)$  простая однопериодическая автоморфная функция, фундаментальной областью которой является горизонтальная полоса единичной ширины.

Введем однопериодические автоморфные функции

$$R_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E'(\tau) P_k(\tau)}{E(\tau) - E(z)} d\tau \quad (k=1, 2) \quad (2.1)$$

исчезающие на бесконечности.

Если  $t$  — любая точка контура, то по формуле Сохоцкого-Племеля получаем

$$R_k^+(t) - R_k^-(t) = P_k(t), \quad (2.2)$$

$$R_k^+(t) + R_k^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E'(\tau) P_k(\tau)}{E(\tau) - E(t)} d\tau \quad (k=1, 2).$$

Подставляя эти выражения в данную систему (1.13), получаем следующую краевую задачу, написанную в матричной форме

$$R^+(t) = C(t) R^-(t) + H(t), \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &= 1 + \frac{2B_{11}(A_{22} - B_{11})}{(A_{11} - B_{11})(A_{22} - B_{11}) - A_{12}A_{21}}; \quad C_{21}(t) = C_{11}(-t); \\ C_{12} &= -\frac{2A_{12}B_{11}}{(A_{11} - B_{11})(A_{22} - B_{11}) - A_{12}A_{21}}; \quad C_{21}(t) = C_{12}(-t); \\ H_1 &= \frac{(A_{22} - B_{11})N_1 - A_{12}N_2}{(A_{11} - B_{11})(A_{22} - B_{11}) - A_{12}A_{21}}; \quad H_2(t) = H_1(-t) \cdot e^{-2\pi i t}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.3) в общем случае проводится путем регуляризации, т. е. приведением к интегральному уравнению Фредгольма

$$\begin{aligned} R^-(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E'(\tau)}{E(\tau) - E(t)} ((C(t)^{-1}C(\tau) - E_0) R^-(\tau) d\tau = \\ = \frac{(C(t))^{-1}}{2} \left( \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E'(\tau) H(\tau)}{E(\tau) - E(t)} d\tau - H(t) \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $E_0$  — единичная матрица.

Интеграл в левой части (2.5) собственный, так как подынтегральное выражение не имеет особенностей в точке  $\tau = t$ . Таким образом,

мы пришли к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Разрешимость этого уравнения обеспечена, так как на контуре элементы матрицы  $C(t)$  и свободные члены, входящие в уравнение (2.3), удовлетворяют условию Гельдера, а определитель матрицы отличен от нуля

$$\det C(t) = \frac{t+i}{t-i} \neq 0 \text{ на контуре} \quad (2.6)$$

Индекс рассматриваемой краевой задачи  $\alpha_1 = -1$ , и однородная задача имеет лишь нулевое решение. При этом уравнение Фредгольма (2.5) всегда эквивалентно исходному.

После несложных преобразований и упрощений векторное уравнение (2.5) представим относительно  $X_k^*(t)$  ( $k=1, 2$ )

$$X_k^*(t) = \sum_{m=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} M_{km}(t, \tau) X_m^*(\tau) d\tau + W_k(t) \quad (k=1, 2) \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} X_1^* &= \frac{(t^2+1)\Delta}{t\Delta_1} X_1; \quad X_2^* = \frac{\Delta}{t\Delta_1} X_2; \\ M_{11} &= \frac{\tau^2\Delta_1(\tau)}{(\tau^2+1)\Delta(\tau)} \left( (a_{21}(\tau)(a_{11}(t)+\tau) - a_{12}(t)(a_{11}(\tau)+t)) \frac{\text{sh}(\tau-t)\beta_1}{\text{sh}(\tau-t)\pi} + \right. \\ &\quad \left. + (a_{11}(\tau) - a_{11}(t) - (\tau-t)a_{12}(t)a_{21}(\tau)) \frac{\text{ch}(\tau-t)\beta_1}{\text{sh}(\tau-t)\pi} \right); \\ M_{12} &= \frac{\tau^2\Delta_1(\tau)}{\Delta(\tau)} \left( \left( a_{22}(t) + \frac{a_{22}(t)-1}{t} a_{11}(\tau) - a_{12}(t)a_{12}(\tau) \right) \frac{\text{sh}(\tau-t)\beta_1}{\text{sh}(\tau-t)\pi} + \right. \\ &\quad \left. + (a_{12}(\tau) - a_{12}(t)) \frac{\text{ch}(\tau-t)\beta_1}{\text{sh}(\tau-t)\pi} \right); \\ M_{21} &= \frac{\tau^2\Delta_1(\tau)}{(\tau^2+1)\Delta(\tau)} \left( \left( a_{21}(t)a_{21}(\tau) - \frac{a_{22}(t)-1}{t} a_{11}(\tau) - a_{22}(t) \right) \frac{\text{sh}(\tau-t)\beta_1}{\text{sh}(\tau-t)\pi} + \right. \\ &\quad \left. + \left( a_{22}(t)a_{21}(\tau) \frac{t-\tau}{t} + \frac{\tau a_{21}(\tau)}{t} - a_{21}(t) \right) \frac{\text{ch}(\tau-t)\beta_1}{\text{sh}(\tau-t)\pi} \right); \\ M_{22} &= \frac{\tau^2\Delta_1(\tau)}{\Delta(\tau)} \left( \left( \frac{a_{22}(\tau)-1}{\tau} a_{21}(t) - \frac{a_{22}(t)-1}{t} a_{12}(\tau) \right) \frac{\text{sh}(\tau-t)\beta_1}{\text{sh}(\tau-t)\pi} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{a_{22}(t)a_{22}(\tau)}{\tau \cdot t} (t-\tau) + \frac{a_{22}(\tau)}{t} - \frac{a_{22}(t)}{\tau} \right) \frac{\text{ch}(\tau-t)\beta_1}{\text{sh}(\tau-t)\pi} \right); \\ W_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( (a_{12}(t)(b_1(\tau) - \bar{u}_0(\tau)) - (a_{11}(t) + \tau)(b_2(\tau) + \bar{v}_0(\tau))) \frac{\text{sh}(\tau-t)\beta_1}{\text{sh}(\tau-t)\pi} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-b_1(z) - \bar{u}_0(z) + a_{12}(t)(z-t)(b_2(z) + \bar{v}_0(z))) \frac{\operatorname{ch}(z-t)\beta_1}{\operatorname{sh}(z-t)\pi} dz + \\
& + a_{11}(t)(b_1(t) + \bar{u}_0(t)) + (t^2 + 1)a_{12}(t)(b_2(t) + \bar{v}_0(t)); \\
W_2 = & \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left( \frac{a_{22}(t) - 1}{t} (b_1(z) + \bar{u}_0(z)) - a_{12}(t)(b_2(z) + \bar{v}_0(z)) \right) \frac{\operatorname{sh}(z-t)\beta_1}{\operatorname{sh}(z-t)\pi} + \right. \\
& \left. + \left( (z-t) \frac{a_{22}(t) - 1}{t} - 1 \right) (b_2(z) + \bar{v}_0(z)) \frac{\operatorname{ch}(z-t)\beta_1}{\operatorname{sh}(z-t)\pi} \right) dz + \\
& + a_{21}(t)(b_1(t) + \bar{u}_0(t)) - a_{11}(t)(b_2(t) + \bar{v}_0(t))
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\Delta = (1 - \nu^2) \operatorname{sh}^2 t_1^* - (1 - \nu_1^2) t^2 \operatorname{sn}^2 t_1^* - \nu_1^2 \tag{2.10}$$

3. Учитывая найденные значения для контактных напряжений из (1.2) имеем:

$$\begin{aligned}
\tau_{02}(z, \beta_1) = & \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 \Delta_1(t)}{\Delta(t)} \left( (-t^2(\operatorname{ch} z + \cos \beta_1) + it \operatorname{sh} z - \cos \beta_1) \frac{X_1'(t)}{t^2 + 1} + \right. \\
& \left. + \operatorname{sn} \beta_1 X_2'(t) \right) e^{-it^2} dt \\
\tau_{03}(z, \beta_1) = & \frac{i(\operatorname{ch} z + \cos \beta_1)}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 \Delta_1(t)}{\Delta(t)} X_2'(t) e^{-it^2} dt.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

В общем случае, если имеем в виду (1.9), (1.6) и (2.7) напряжения в любой точке сечения выражаются несобственными интегралами вида

$$\tau(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\tau}(x, t)}{\Delta(t)} (a+x)^{-(1+\mu)} (a-x)^{-(1-\mu)} dt, \tag{3.2}$$

которые можно находить с помощью различных численных методов после определения  $\bar{\tau}(x, t)$ .

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности  $x = \pm a$  (т. е.  $x = \pm \infty$ ) применяем теорему о вычетах, представим (3.2) в виде бесконечного ряда

$$\tau(x) = 2\pi i \left( \frac{\bar{\tau}(x, t_1)}{\Delta'(t_1)} (a+x)^{-(1+\mu)} (a-x)^{-(1-\mu)} + \sum_{k=2,3,\dots} \operatorname{выч} (f_1(t, x), t_k) \right) \tag{3.3}$$

Здесь  $f_1(t, x)$  — подынтегральная функция (3.2), а  $t_k = \xi_k \pm i\eta_k$  корни уравнения

$$\Delta(t) = 0, \quad (3.4)$$

которые принимаются возрастающими с  $k$  положительными  $\gamma_k$ .

Очевидно, характер напряженного состояния около края  $x = \pm a$  ( $a = \infty$ ) определяется величиной мнимой части первого корня уравнения (3.4).

Уравнения (3.4) совпадают с уравнениями, полученными в работе (1).

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и  
Ереванского государственного университета

## Լ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Երկու շրջանային աղեղներով սահմանափակված տիրույթի, առաձգականությամբ տեսության խառը եզրային պայմաններով, հաբր խնդրի լուծումը

Աշխատանքը նվիրված է երկու շրջանային աղեղներով սահմանափակված տիրույթի, առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններով, հաբր խնդրի լուծմանը:

Նրկրենո կոորդինատային սխտեմում, լարումների ֆունկցիայի մեջ մտնող անհայտ ֆունկցիաների որոշման համար, ավտոմորֆ ֆունկցիաների օգնությամբ, ստացված է Ռիման-Հիլբերտի եզրային խնդրի վերջինս րնդհանուր դեպքում բերված է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի, լուծելի ինտեգրալ հավասարումների սխտեմի:

Ստացված է երկու պարամետրից կախված տրանսցենդենտ հավասարում, որի առաջին արմատը բնութագրում է եզակիության կարգը, անկյունային կետում:

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> G. B. Jeffery, Phil. Trans. Roy. soc. Lond., A., № 221, 1921.
- <sup>2</sup> Я. С. Уфлянд, Биполярные координаты в теории упругости, ГТТИ, М., 1950. <sup>3</sup> Я. С. Уфлянд, Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Изд. «Наука», Л., 1968.
- <sup>4</sup> Г. Н. Савин, Распределение напряжений около отверстий, Изд. «Научова думка», Киев, 1968.
- <sup>5</sup> В. В. Еганян, Сб. трудов ЕрПИ, № 20, Машиностроение, вып. 4, 1959.
- <sup>6</sup> Л. А. Арутюнян, «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. 29, № 1 (1976).
- <sup>7</sup> Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Изд. «Наука», М., 1968.
- <sup>8</sup> Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, М., 1963.
- <sup>9</sup> Н. П. Веква, Системы сингулярных интегральных уравнений, Изд. «Наука», М., 1970.
- <sup>10</sup> Л. И. Чибрикова, Уч. зап. Казанского ун-та, т. 116, кн. 4, 1956.