ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXV 1977 1

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Р. Г. Айрапетян

Смешанная задача для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка при нарушении равномерного условия Лопатинского

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 22/IV 1977)

L^2—корректность смешанных задач для строго гиперболических уравнений второго порядка рассматривалась в работах [1–3]. Что же касается корректности с потерей гладкости, то, как показано в работах [1–6], она имеет место и при более слабых ограничениях. В работах [1,7–9] доказана корректность с потерей гладкости смешанной задачи уже для вырождающихся гиперболических уравнений, но лишь при граничном условии Дирихле.

В настоящей работе для уравнений второго порядка предлагается подход, позволяющий перенести результаты, полученные для смешанных задач с граничным условием Дирихле, на более широкий класс граничных задач, для которых даже в случае строго гиперболических уравнений нет L^2-корректности из-за нарушения равномерного условия Лопатинского. Результаты, полученные для случая полупространства, разумеется, могут быть перенесены на случай произвольной ограниченной области. В доказательстве используется метод обращения интегрального неравенства с неинтегрируемым ядром [10], при котором, как показано в работах [11,12], возрастает число условий согласования.

Пусть в области $R^n_+\times(0, T)$ задан слабо гиперболический оператор второго порядка $A(x, D)$ и оператор первого порядка $B(x',D)$, заданный на границе. В настоящей работе мы будем рассматривать такие операторы $A(x, D)$, для которых нужно задавать одно граничное условие (см. [3]).

Мы будем рассматривать следующую задачу:

$$Au=f \text{ при } t\in(0, T),\ x\in R^n_+=\{(x', x_n);\ x_n>0,\ x'=(x_1,\dots,x_{n-1})\in R^{n-1}\}$$

$$Bu=0 \quad \text{при } x_n=0,\ t\in(0, T),\ x'\in R^{n-1} \tag{1}$$

$$u=0,\ u_t=0 \quad \text{при} \quad t=0,\ x\in R^n_+.$$

Введем некоторые пространства:

1) $E(V)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых в области V функций с компактными носителями.

2) $H^{p,q}(V)$ — пополнение $E(V)$ по норме

$$|f|^2_{p,q}=\int\limits_V \sum_{l+|\nu|\leq p}\ \sum_{|\nu|\leq q} \left|\frac{\partial}{\partial t^l \partial x^{\nu+l}} f\right|^2 dV,\quad |f|_{p,0}=|f|_p,\quad |f|_0=|f|.$$

Используются также следующие обозначения:

$$V^T_{T_0}=(T_0,\ T)\times R^n_+,\quad V^T_0=V^T,\quad S_t=\{(\tau,\ x);\ \tau=t,\ x\in R^n_+\}$$

$\Gamma_t=\{(\tau,\ x',\ x_n);\ 0<\tau<t,\ x'\in R^{n-1},\ x_n=0\}$, $\Gamma_T=\Gamma$, $t=x_0$.

Условимся говорить, что оператор L, определенный в области $(0,\ T)\times R^n_+$, является слабо коммутирующим с A проолжением оператора B, если выполняются следующие условия:

1) при $x_n=0$ $L(x,\ D)=B(x',\ D)$

2) если оператор A представить в виде $A=RL+D$, где

$$D=\sum_{|p'|\leq 2} d_{p'} D^{p'}\quad p'=(p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_{n-1}),$$

а $R=\sum\limits_{i=0}^{n} r_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}+r$ — оператор первого порядка, то

$$[L,\ D]=\lambda D+C+\varkappa L, \tag{2}$$

где $C=\sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}+c$ — оператор первого порядка.

Назовем смешанную задачу с граничным условием Дирихле хорошо поставленной для оперзтора P, вырождающегося со скоростью ω, если

1) для $\forall u\in H^1((0,\ T)\times R^n_+)$ такой, что $u=0$ на Γ, $u=0$, $u_t=0$ на S_0, справедливо интегральное неравенство

$$\int\limits_{S_t}\left(u_t^2+\omega\sum_{i=1}^{n} u^2_{x_i}\right) dS\leq M\int\limits_{V^t}\left(\mathrm{const}+\frac{\omega'}{\omega}\right)\left(u_t^2+\omega\sum_{i=1}^{n} u^2_{x_i}\right) dV+$$

$$+\int\limits_{V^t}(Pu)^2 dV,$$

где M — const, $\omega=\omega(t)>0$ при $t>0$, $\omega\downarrow 0$ при $t\to 0$.

2) существует ассоциированный с P оператор P' такой, что

а) $|(P-P')u|\leq \dfrac{\omega'}{t\omega^{1-\delta}}|u|_{0,2}$ для $\forall u\in H^{0,2}((0,\ T)\times R^n_+)$

б) для $\forall f\in H^{p,q}(V^T)$, $q\leq\gamma$, удовлетворяющей условиям согласования $C_{p+\gamma}$, существует единственное решение $u\in H^{p,q}(V^T)$ задачи

$$P'u=f(t,x',x_n)-f(t,x',0)e^{-x_n} \text{ в } V^T$$

$$u=0,\quad u_t=0 \text{ на } S_0,\quad u=0 \text{ на } \Gamma,$$

для которого имеет место оценка $|u_t|_{0,m}\le \text{const}\cdot t|f|_{0,m}$, $m\le\gamma$.

Аналогично, назовем задачу Коши хорошо поставленной для оператора Q, вырождающегося со скоростью ω, если

1) для $\forall u\in H_1((0,T)\times R^n_+)$, такой, что $u=0$, $u_t=0$ на S_0 выполняется интегральное неравенство

$$\int\limits_{S_t}\Big(u_t^2+\omega\sum_{i=1}^{n-1}u_{x_i}^2\Big)dS\le M\int\limits_{V^t}\Big(\text{const}+\frac{\omega'}{\omega}\Big)\Big(u_t^2+\omega\sum_{i=1}^{n-1}u_{x_i}^2\Big)dV+$$

$$+\int\limits_{V^t}(Qu)^2dV$$

2) существует оператор Q' такой, что

а) $|(Q-Q')u|\le\dfrac{\omega'}{t\omega^{1-\varepsilon}}|u|_{0,2}$ для $\forall u\in H^{0,2}((0,T)\times R^n_+)$

б) для $\forall f\in H^{p,q}(V^T)$, $q\le\gamma$ существует единственное решение $u\in H^{p,q}(V^T)$ задачи $Q'u=f$ в V^T, $u=0$ $u_t=0$ на S_0, для которого имеет место оценка $|u_t|_{0,m}\le\text{const}\cdot t|f|_{0,m}$, $m\le\gamma$.

Теорема. *Пусть, кроме условий согласования C_{p+1} (см. ([1])), выполняются следующие условия:*

I) *Существует оператор L, который является слабо коммутирующим с A продолжением оператора B.*

II) *Смешанная задача с граничным условием Дирихле хорошо поставлена для оператора $\bar{A}=LR+D-\nu R+\varkappa$, вырождающегося со скоростью ω.*

III) *Оператор D—слабо гиперболический и вырождающийся со скоростью ω, причем задача Коши для него хорошо поставлена.*

IV) *Коэффициенты операторов R и C таковы, что*

$$|r_i|^2+|c_k|^2\le\text{const}\cdot\omega';\ i=1,\dots,n;\ k=1,\dots,n-1$$

V) $Lf-\nu f\in H^{p,q}((0,T)\times R^n_+)$, $f\in H^{p,q}((0,T)\times R^n_+)$

$$\int\limits_{\Gamma}\sum_{i+|k|\le p}\Big(\Big|\frac{\partial}{\partial t^i\partial x^k}(Lf-\nu f)\Big|^2+\Big|\frac{\partial}{\partial t^i\partial x^k}f\Big|^2\Big)\omega^{-(M+\varepsilon)}\,dS<\infty$$

$$f=\frac{\partial f}{\partial t}=\dots=\frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}}f=0 \quad \text{на} \quad S_0,$$

где ε—сколь угодно малое положительное число.

Тогда для $p\ge1$ существует единственное решение $u\in H^p((0,T)\times R^n_+)$

задачи (*I*) *и для него справедлива оценка*

$$|u|_p + |Lu|_p \leqslant \text{const}\,(|f|_{p,\gamma} + |Lf - \lambda f|_{p,\gamma} +$$

$$+ \Bigg(\int\limits_{\Gamma} \sum_{i+|\nu|<p} \left(\left| \frac{\partial}{\partial t^i \partial x^{\nu}} (Lf - \lambda f) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial t^i \partial x^{\nu}} f \right|^2 \right) \omega^{-(M-\alpha)} dS \Bigg)^{1/2} \Bigg). \quad (3)$$

Применяя к обеим частям уравнения $Au = f$ оператор L, получаем, используя условие I,

$$\bar{A}Lu + Cu = Lf - \lambda f, \quad \text{где} \quad \bar{A} = LR + D - \lambda R + \varkappa.$$

Обозначая $Lu = v$ и используя условие (2) получаем систему

$$\begin{aligned} &\bar{A}v + Cu = Lf - \lambda f, \\ &Du + Rv = f, \end{aligned} \quad (4)$$

для которой ставится задача:

$$v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma$$

$$u = 0, \ u_t = 0, \quad v = 0, \quad v_t = 0 \quad \text{на} \quad S_0.$$

Введем обозначения

$$E_1(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{0<\tau<t} \int\limits_{S_\tau} \left(v_t^2 + \omega \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 \right) dS,$$

$$E_2(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{0<\tau<t} \int\limits_{S_\tau} \left(u_t^2 + \omega \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i}^2 \right) dS.$$

Из первого уравнения системы (4) и условий II и IV получаем:

$$E_1(t) \leqslant M_1 \int\limits_0^t \left(\text{const} + \frac{\omega'}{\omega} \right) E_1(\tau) d\tau + M_2 \int\limits_0^t \left(\text{const} + \frac{\omega'}{\omega} \right) E_2(\tau) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{V^t} (Lf - \lambda f)^2 dV.$$

Из второго уравнения системы (4) и условий III и IV получаем:

$$E_2(t) \leqslant \int\limits_0^t M_3 \left(\text{const} + \frac{\omega'}{\omega} \right) E_2(\tau) d\tau + M_4 \int\limits_0^t \left(\text{const} + \frac{\omega'}{\omega} \right) E_1(\tau) d\tau + \int\limits_{V^t} f^2 dV.$$

Обозначая $M = \max(M_1 + M_4, \ M_2 + M_3)$, $E(t) = E_1(t) + E_2(t)$ получаем

$$E(t) \leqslant M \int\limits_0^t \left(\text{const} + \frac{\omega'}{\omega} \right) E(\tau) d\tau + \text{const} \int\limits_{V^t} [(Lf - \lambda f)^2 + f^2] dV.$$

Таким образом, мы получили интегральное неравенство с неинтегрируемым ядром. Как показано в работе [10], это неравенство можно обратить, если выполняется условие:

$$\int\limits_{V^T} \frac{(Lf-\lambda f)^2+f^2}{\omega^{M+\varepsilon}}\,dV<\infty. \tag{5}$$

В работах [10,12,14] подробно показано, что если f — достаточно гладкая по пространственным переменным функция, то с помощью редукции задачу можно свести к некоторой новой задаче, для которой условие (5) на правую часть выполняется. Суть этого подхода заключается в следующем.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу

$$\bar{A}'v^1 + c_0u^1_t + cu^1 = Lf - \lambda f - (Lf-\lambda f)|_{x_n=0}\,e^{-x_n}$$

$$D'u^1 + r_0v^1_t + rv^1 = f(t,x',x_n) - f(t,x',0)e^{-x_n} \quad \text{в } V^T$$

$$v^1=0 \quad \text{на } \Gamma,\ v^1=0,\quad v^1_t=0,\ u^1=0,\quad u^1_t=0 \quad \text{на } S_0.$$

В силу условий II, III, V эта задача имеет решения u^1 и v^1, для которых имеют место оценки

$$|v^1_t|_{0,m} \leqslant \text{const}\cdot t(|Lf-\lambda f|_{0,m}+|f|_{0,m}) \qquad m\leqslant\gamma$$

$$|u^1_t|_{0,m} \leqslant \text{const}\cdot t(|Lf-\lambda f|_{0,m}+|f|_{0,m})$$

Обозначая $D''=D-D'$, $\bar{A}''=\bar{A}-\bar{A}'$ получаем:

$$D(u-u^1)+R(v-v^1) = -D''u^1-\sum_{i=1}^{n} r_iv^1_{x_i}+f(t,x',0)e^{-x_n},$$

$$\bar{A}(v-v^1)+C(u-u^1) = -A''v^1-\sum_{i=1}^{n-1} c_iu^1_{x_i}+(Lf-\lambda f)|_{x_n=0}\,e^{-x_n}.$$

Введем новые неизвестные функции $\bar{u}=u-u^1$, $\bar{v}=v-v^1$. Мы получаем новую систему, правые части которой удовлетворяют оценкам

$$\left|D''u^1+\sum_{i=1}^{n} r_iv^1_{x_i}\right|_{0,m-2} \leqslant \text{const}\cdot\omega^{t}(|Lf-\lambda f|_{0,m}+|f|_{0,m}), \qquad m\leqslant\gamma$$

$$\left|A''v^1+\sum_{i=1}^{n-1} c_iu^1_{x_i}\right|_{0,m-2} \leqslant \text{const}\cdot\omega^{t}(|Lf-\lambda f|_{0,m}+|f|_{0,m}).$$

Делая γ шагов редукции, приходим к оценке:

$$|u|_1+|Lu|_1\leqslant \text{const}\left(|f|_{0,\gamma}+|Lf-\lambda f|_{0,\gamma}+\left(\int\limits_{\Gamma}^{t}\frac{(Lf-\lambda f)^2+f^2}{\omega^{M+\varepsilon}}\,dS\right)^{1/2}\right).$$

Дифференцируя уравнение подобно тому, как это делается в работе [3], получаем оценку (3).

Для строго гиперболических уравнений в работе [4] получено существование решений. Поэтому для доказательства существования в случае вырождающихся уравнений достаточно использовать операторы осреднения ([12]) или метод возмущений О. А. Олейник ([8]).

Рассмотрим следующую задачу:

$$Au=u_{tt}-a^2(t)(u_{xx}+u_{yy})=f \quad \text{при} \quad t>0,\ y\in R^1,\ x>0,$$

$$Bu=u_x+\alpha(t)u_t=0 \quad \text{при} \quad t>0,\ y\in R^1,\ x=0,$$

$$u=0,\ u_t=0 \quad \text{при} \quad t=0,\ y\in R^1,\ x>0.$$

Если $\alpha(t)>0$, то даже в случае строго гиперболического уравнения, т. е. когда $a^2(t)>0$ при $t\in[0, T]$, нет L^2—корректности из-за нарушения равномерного условия Лопатинского.

Будем искать оператор L из условия 1 в виде:

$$L=\frac{\partial}{\partial x}+\beta(t, x)\frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{где } \beta(t, 0)=\alpha(t).$$

Тогда

$$A=\left(-a^2\frac{\partial}{\partial x}+a^2\beta\frac{\partial}{\partial t}\right)Lu+D,$$

где

$$D=(1-a^2\beta^2)u_{tt}-a^2u_{yy}+a^2(\beta_x-\beta\beta_t)u_t.$$

Потребуем, чтобы $[L, D]=\lambda D+C.$

Отсюда находим $\lambda=2\beta\dfrac{a_t}{a}$, $\varkappa=0$, а β должна удовлетворять следующим условиям:

$$\beta_t+a^2\beta\beta_x+\frac{a_t}{a}\beta=0 \quad \text{при} \quad x>0,\quad t>0,$$

$$\beta=\alpha(t) \qquad \text{при} \quad x=0,\quad t>0.$$

Условие 1 заключается в требовании, чтобы эта задача имела решение. Оно может не быть единственным. В этом случае нужно выбрать такое решение β, для которого выполняется условие (6). Остальные условия теоремы проверить несложно.

Требование, чтобы оператор D был слабо гиперболический, заменяет в нашей работе условие Лопатинского. В настоящем примере D—слабо гиперболический оператор, если

$$1-a^2\beta^2>0 \quad \text{при} \quad t\in[0, T]. \tag{6}$$

В силу того, что по x_n можно сделать разбиение единицы, условие (6) должно выполняться в полосе $0\leq x_n<\varepsilon$, где ε—сколь угодно малое число. Если a, β—непрерывны, то для выполнения условия (6) достаточно выполнения на границе Г условия $1-a^2\alpha^2>0$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Դ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Խառը խնդիր երկրորդ կարգի վերածվող հիպերբոլական հավասարումների համար Լոպատինսկու հավասարաչափ պայմանի խախտվելու դեպքում

Հոդվածում երկրորդ կարգի վերածվող հիպերբոլական հավասարումների համար առաջարկվում է մոտեցում, որը թույլ է տալիս Դիրիխլեի եզրային պայմանով խառը խնդիրների դեպքում ստացված արդյունքները տարածել եզրային խնդիրների ավելի լայն դասի վրա։ Այդպիսի խնդիրների համար L^2-կոռեկտությունը խախտվում է նաև խիստ հիպերբոլական հավասարումների դեպքում, որովհետև խախտվում է Լոպատինսկու հավասարաչափ պայմանը։ Ապացուցման մեջ օգտագործվում են ինտեգրալ անհավասարություններ ու ինտեգրելի կորիզով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *S. Miyatake*, J. Math. Kyoto Univ., 13, № 3, 435—487 (1973). [2] *R. Agemi*, Proc. Jap. Acad., 51, № 4, 247—252 (1975). [3] *Р. Айрапетян*, Известия АН Арм. ССР, сер. матем., т. 12, № 1, 32—45 (1977). [4] *M. Ykawa*, *Osaka*, J. Math., 12, 69—115 (1975). [5] *Ж. Шазарен*, „Математика" Сб. пер. ин. статей, 18, № 2, 79—109 (1974). [6] *M. Tsuji*, Proc. Jap. Acad., 50 № 2, 138—142 (1974). [7] *М. Краснов*, Матем. сб. 49(91), 29—84 (1959). [8] *О. А. Олейник*, ДАН СССР, т. 169, № 3, 525—528 (1966). [9] *Г. М. Фатеева*, ДАН СССР, т. 172, № 6, 1278—1281 (1967). [10] *А. Б. Нерсесян*, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем., т. 3, № 2, 79—100 (1968). [11] *К. Ягджян*, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем., т. 11, № 5, 424—431 (1976). [12] *К. Ягджян*, ДАН Арм. ССР, т. 64, № 2 (1977). [13] *А. Б. Нерсесян*, *Г. Р. Оганесян*, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем., т. 9, № 2, 149—165 (1974). [14] *А. Б. Нерсесян*, *Л. О. Оганесян*, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем., т. 8, № 3, 255—273 (1973).