ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIV 1977 5

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Г. Е. Багдасарян

О колебаниях и устойчивости проводящих пластин в поперечном магнитном поле

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 15/XII 1976)

На основе гипотезы магнитоупругости тонких тел, предложенной в работах [1,2], рассматриваются задачи колебаний и устойчивости проводящих пластин в магнитном поле, вектор напряженности которого перпендикулярен к срединной плоскости пластинки. Определяются критическое значение напряженности магнитного поля и частоты колебания пластинки. Исследуется влияние проводимости материала пластинки и напряженности магнитного поля на характеристики упругих колебаний.

1. Пусть упругая изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ отнесена к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью x_1x_2.

Пластинка, изготовленная из материала с конечной постоянной электропроводностью σ, находится в заданном постоянном магнитном поле $\vec{B}_0(0,0,B_3)$.

В отношении тонкой пластинки принимается гипотеза магнитоупругости тонких тел [1,2], согласно которой а) нормальный к срединной плоскости прямолинейный элемент пластинки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной срединной поверхности пластинки, и сохраняет свою длину; б) тангенциальные компоненты вектора напряженности возбуждаемого электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности возбуждаемого магнитного поля по толщине пластинки остаются неизменными.

В работах [1,2] показано, что в случае поперечного магнитного поля, в силу указанной гипотезы, связанная система магнитоупругости пластинки частично распадается (в уравнение движения пластинки не входят компоненты индуцированного магнитного поля) и задача исследования возмущенного состояния пластинки приводится к решению следующего уравнения:

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\sigma h^3}{3c^2} B_3^2 \frac{\partial \Delta w}{\partial t} = - \frac{2h(\mu-1)}{4\pi\mu} B_3^2 \Delta w +$$

$$+ N_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2N_{12}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{22}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \tag{1.1}$$

с обычными условиями закрепления краев пластинки.

Здесь N_{ij}^0—усилия, характеризующие начальное невозмущенное состояние пластинки, которые появляются вследствие намагничивания тела. Они определяются из следующих уравнений равновесия невозмущенного состояния и граничных условий на поверхности пластинки

$$\frac{\partial \sigma_{ik}^0}{\partial x_k} = 0, \quad \vec{n} \cdot \hat{\sigma}^0 = \vec{F}, \quad N_{ij}^0 = \int_{-h}^{h} \sigma_{ik}^0 \, dx_3, \tag{1.2}$$

где

$$\vec{F} = \vec{n}\left(\hat{T}_1 - \hat{T}_2\right), \quad T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[H_{0i} B_{0k} - \frac{\delta_{ik}}{2} \vec{H}_0 \vec{B}_0 \right] \vec{H}_0 = \mu^{-1}\vec{B}_0$$

$\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности пластинки, $\hat{\sigma}_0$ — тензор напряжений начального состояния.

В уравнении (1.1), как обычно w — прогиб пластинки, Δ — двумерный оператор Лапласа, $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность, μ — магнитная проницаемость материала пластинки.

На основе уравнения (1.1) рассмотрим конкретные задачи.

2. Имея в виду, что магнитная проницаемость μ обычно близка к единице (ферромагнитные материалы здесь не рассматриваются) и пренебрегая величинами порядка $|1-\mu|$ по сравнению с единицей, решение задачи (1.2) в случае поперечного магнитного поля найдем в виде

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = - \frac{1-\mu}{8\pi\mu} B_3^2, \quad \sigma_{12}^0 = 0, \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.1), задачу магнитоупругих колебаний прямоугольной пластинки в поперечном магнитном поле приводим к решению уравнения

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2\sigma h^3}{3c^2} B_3^2 \frac{\partial \Delta w}{\partial t} - \frac{h(\mu-1)}{4\pi\mu} B_3^2 \Delta w \tag{2.2}$$

при обычных условиях для w на контуре пластинки.

Представляя решение рассматриваемой задачи в виде

$$w = w_0 e^{-t} \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2, \quad \left(\lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b} \right)$$

удовлетворим известным условиям шарнирного опирания, а из уравнения (2.2) для определения частоты ω получим характеристическое уравнение

$$\Omega^2 + 2\sigma_0 B_0^2 \Omega + 1 - \mu_0 B_0^2 = 0. \tag{2.3}$$

Здесь приняты следующие безразмерные обозначения:

$$\Omega = \frac{\omega}{\Omega_0}, \quad \Omega_0^2 = \frac{D}{2\rho h}\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma h}{2c^2}\sqrt{\frac{(1-\nu^2)E}{3\rho}} \tag{2.4}$$

$$B_0^2 = \frac{B_3^2}{E}, \quad \mu_0 = \frac{3(\mu-1)}{8\pi\mu}\,\frac{1-\nu^2}{h^2}\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^{-1},$$

где Ω_0 — собственная частота колебания пластинки в отсутствии магнитного поля, а параметры σ_0, μ_0 и B_0 характеризуют соответственно проводимость, магнитную проницаемость материала пластинки и напряженность заданного магнитного поля.

Решая уравнение (2.3), для определения комплексной частоты колебания пластинки в зависимости от напряженности магнитного поля, получаем

$$\Omega = -\sigma_0 B_0^2 \pm \sqrt{\sigma_0^2 B_0^4 + \mu_0 B_0^2 - 1}. \tag{2.5}$$

Рассматривая (2.5) замечаем, что характер движения пластинки в магнитном поле существенно зависит от знака величины μ_0.

Здесь возможны следующие случаи:

а) Если $\mu_0 < 0$ (этот случай, как видно из (2.4), соответствует диамагнитным материалам ($\mu < 1$)), то колебания пластинки затухают во времени. При этом, если

$$B_0^2 \leqslant \frac{-\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 + 4\sigma_0^2}}{2\sigma_0^2} = (B_0^2)_{\text{пр}}$$

то затухание возмущений имеет колебательный характер с коэффициентом затухания $\sigma_0 B_0^2$ и частотой

$$\mathrm{Im}\,\Omega = (1 - \mu_0 B_0^2 + \sigma_0^2 B_0^4)^{1/2}. \tag{2.6}$$

В противном случае возмущения затухают без колебаний.

б) Если $\mu_0 > 0$ (случай парамагнитного материала ($\mu > 1$)), то начиная с определенного значения напряженности магнитного поля

$$B_{0*}^2 = \mu_0^{-1} \tag{2.7}$$

один из корней (2.5) становится положительным, что означает неограниченное возрастание возмущений во времени.

Таким образом, наличие поперечного магнитного поля в случае диамагнитных материалов приводит к затуханию колебаний, а в случае парамагнитных материалов — к потере устойчивости пластинки. Для критического значения напряженности магнитного поля, согласно (2.4) и (2.7), имеем

$$B_{3*}^2 = \frac{8\pi\mu}{\mu-1} \; \frac{\rho\,\Omega_0^2}{\lambda_m^2 + \mu_n^2}. \tag{2.8}$$

Из (2.6) видно также, что с увеличением напряженности магнитного поля частота колебаний уменьшается и при $B_0 = (B_0)_{пр}$ становится равной нулю.

3. Рассмотрим задачу устойчивости сплошной круглой пластинки радиуса a, изготовленной из проводящего материала с преобладающим парамагнитным эффектом ($\mu > 1$). Будем пользоваться цилиндрической системой координат, основная плоскость которой совпадает со срединной плоскостью, а начало координат — с центром пластинки Длину радиуса-вектора обозначим через r, полярный угол—через θ.

В рассматриваемом случае начальное невозмущенное состояние характеризуется усилиями

$$N_{rr}^0 = N_{\theta\theta}^0 = -\frac{h(1-\mu)}{4\pi\mu} B_3^2, \quad N_{r\theta}^0 = 0. \tag{3.1}$$

Учитывая (3.1) и переходя к новой системе координат из (1.1) получим уравнение устойчивости пластинки. Произведя указанную замену переменных и учитывая, что все величины не зависят от времени t, дифференциальное уравнение задачи получим в виде

$$\Delta^2 w + a^2 \Delta w = 0, \tag{3.2}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right], \quad a^2 = \frac{h(\mu-1)}{4\pi\mu}\frac{B_3^2}{D}. \tag{3.3}$$

Решение уравнения (3.2) представим в виде (3)

$$w(r, \theta) = w(r)\cos n\theta, \tag{3.4}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ — число волн срединной поверхности пластинки в окружном направлении.

Подставляя значение w из (3.4) в уравнение (3.2) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $w(r)$

$$\Delta_n^2 w + \alpha^2 \Delta_n w = 0, \quad \Delta_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}. \tag{3.5}$$

Общее решение уравнения (3.5) имеет вид

$$W(r) = c_1 I_n(\alpha r) + c_2 Y_n(\alpha r) + c_3 r^n + c_4 r^{-n}, \tag{3.6}$$

где I_n и Y_n – функции Бесселя действительного аргумента порядка n, c_i — постоянные интегрирования.

Ввиду того, что рассматриваемая пластинка сплошная (точка $r=0$ содержится в области интегрирования), в (3.6) следует принять $c_2 = c_4 = 0$. Остальные постоянные c_1 и c_3 должны быть определены из условий на контуре $r=a$.

Если пластинка жестко заделана по контуру, то удовлетворение граничных условий $W(a) = W'(a) = 0$ приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно c_1 и c_3

$$\begin{gathered} c_1 I_n(a\alpha) + c_3 a^n = 0, \\ c_1 \left[\frac{n}{a} I_n(a\alpha) - \alpha I_{n+1}(a\alpha)\right] + c_3 n a^{n-1} = 0. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Приравнивая нулю определитель системы (3.7) получаем

$$I_{n+1}(a\alpha) = 0. \tag{3.8}$$

Имея корни этого уравнения при различных $n = 0, 1, 2, \ldots,$ определяем критические значения напряженности внешнего магнитного поля B_{3*}. Для B_{3*}, согласно (3.3), находим

$$B_{3*}^2 = \frac{4\pi\mu}{h(\mu-1)} \frac{D}{a^2} \alpha_n^2, \tag{3.9}$$

где α_n — корни уравнения $I_{n+1}(x) = 0$.

В частности наименьший корень этого уравнения при $n=0$ равен 3,83. В силу этого, из (3.9) для минимального критического значения напряженности магнитного поля в случае осесимметричной формы потери устойчивости получим формулу:

$$B_{\text{г}}^2 = \frac{58{,}72\,\pi\mu}{h(\mu-1)} \frac{D}{a^2}. \tag{3.10}$$

Если же пластинка шарнирно закреплена по контуру, то аналогичным образом получим следующее характеристическое уравнение:

$$I_n(a\alpha) - \frac{1-\nu}{a\alpha} I_{n+1}(a\alpha) = 0. \tag{3.11}$$

Зная корни z_n уравнения (3.11), из (3.9) определяем критические значения напряженности магнитного поля.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ընդլայնական մագնիսական դաշտում գտնվող հաղորդիչ սալի կայունության և տատանումների մասին

Բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածի հիման վրա դիտարկված է հաղորդիչ սալի տատանումների և կայունության խնդիրները ընդլայնական մագնիսական դաշտում։

Որոշվում են մագնիսական դաշտի լարվածության կրիտիկական արժեքը և սալի տատանման հաճախականությունները։ Ուսումնասիրված է սալի նյութի էլեկտրահաղորդականության և տված մագնիսական դաշտի լարվածության ազդեցությունն առաձգական տատանումների հաճախականությունների և մարման գործակցի վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки, ПММ, т. 35, вып. 2 (1971). [2] *С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян,* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин, ПММ, т. 37, вып. 1 (1973). [3] *А. С. Вольмир,* Устойчивость упругих систем, Физматгиз, М., 1963.