ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIV 1977 5

УДК 513.836

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян

Зависимость бесконечномерных гомотопических групп от базисной точки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 16/IV 1977)

В этой статье рассматривается вопрос о зависимости бесконечномерных гомотопических групп $\Pi_q(X, x_0)$ и $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства H ([1], [2]) от выбора базисной точки $x_0 \in X$. Оказалось, что как и в случае конечномерных гомотопических групп, бесконечномерные гомотопические группы, построенные в различных точках, принадлежащих одной и той же компоненте линейной связности множества X изоморфны между собой.

При этом представляется удобным воспользоваться первым из двух эквивалентных подходов к определению бесконечномерных гомотопических групп, а именно, подходом, опирающимся на произвольный фиксированный ортонормированный базис $\sigma = \{e_n\}$ пространства H и линейные ограниченные операторы S_σ^q, $T_\sigma^q : H \to H$, определяемые по формулам:

$$S_\sigma^q(e_n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leq q \\ e_{n-q} & \text{при } n > q \end{cases}$$

$$T_\sigma^q(e_n) = e_{n+q} \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Через Σ будем обозначать замкнутый единичный шар пространства. Пусть X произвольное подмножество пространства H, а $x_0 \in X$ произвольная фиксированная точка, которую мы примем в качестве базисной.

Определение. Для любого целого числа q непрерывное отображение $f : (H, H \setminus \Sigma) \to (X, x_0)$ называем сфероидом (первого рода) индекса q множества X в точке x_0, если при $q \geqslant 0$ $f = \varphi \circ T_\sigma^q$, где отображение φ определено на $T_\sigma^q(H)$ и принадлежит классу K_0, построенного В. Г. Болтянским ([1]), а при $q \leqslant 0$ $f = S_\sigma^{-q} \circ \psi$, где отображение $\psi : H \to H$ принадлежит классу K_0. Если f и g — два сфероида одного и того же индекса q множества X в точке x_0, то их суммой называем сфероид $h = f + g$, задаваемой по формуле:

$$h(x)=\begin{cases} f(2x+e_1) & \text{при} \quad xe_1\leqslant 0 \\ g(2x-e_1) & \text{при} \quad xe_1\geqslant 0, \end{cases}$$

где xe_1 — скалярное произведение вектороа x и e_1.

Обозначим через R числовую прямую, а через I-отрезок $[0, 1]$. Прямое произведение $H^*=R\times H$ будем рассматривать как гильбертово пространство, считая для двух элементов (t, x), (t', x') пространства H^* их скалярное произведение равным $tt'+xx'$. Если обозначить вектор $(1, 0)\in H^*$ через e_0, то последовательность $\sigma^*=(e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots)$ будет ортонормированным базисом пространства H^* (где $\sigma=\{e_n\}$) — упомянутый выше фиксированный базис.

Ясно, что H-гиперплоскость в H^* ортогональная вектору e_0, а $I\times H$ — полоса в H^*.

Определение. Непрерывное отображение $\Phi: I\times H\to X$ называется гомотопией сфероидов индекса q множества X в точке $x_0\in X$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

а) При $q\geqslant 0$ $\Phi=\varphi\circ T^q_{\sigma^*}$, а

при $q\leqslant 0$ $\Phi=S^{-q}_{\sigma^*}\circ\psi$, где

отображения $S^q_{\sigma^*}$, $T^q_{\sigma^*}$ и φ, ψ обладают упомянутыми выше свойствами при определении сфероидов, но уже относительно гильбертова пространства H^*.

б) для любого $t\in I$ отображение $f_t: H\to X$, определяемой равенством $f_t(x)=\Phi(t, x)$, $x\in H$ является сфероидом индекса q множества X в точке x_0. Если при этом $f_0=f$ и $f_1=g$, то мы будем говорить, что гомотопия Φ соединяет сфероиды f и g.

Два сфероида f, g индекса q множества X в точке x_0 называются гомотопными между собой, если существует соединяющая их гомотопия.

В случае бесконечномерных гомотопических групп $\Pi^c_q(X, x_0)$ компактного типа на сфероиды и их гомотопии (которые при этом называются компактного типа) накладываются дополнительные ограничения. А именно, требуется, чтобы прообраз $f^{-1}(M)$ для каждого компактного $M\subset X\setminus\{x_0\}$ был компактен и на этом прообразе терминальная производная (³) отображения $T^{-q}_{\sigma}\circ f$ (при $q\leqslant 0$) или отображения $f\circ S^q_{\sigma}$ (при $q>0$) была отлична от нуля. Далее, от гомотопии $\Phi(t, x)$ требуется, чтобы сфероиды, определенные формулой $f_t(x)=\Phi(t, x)$ были компактного типа.

Предложение 1. Пусть $f:(H, H\setminus\Sigma)\to(X, x_1)$ произвольный сфероид индекса q множества X в точке x_1, а $\sigma:(I, 0, 1)\to(X, x_0, x_1)$ некоторые путь в X, соединяющий точку x_0 с x_1.

Определим гомотопию $\varphi_t:(H\setminus\Sigma)\to X$ отображения $\varphi_0=f|H\setminus\Sigma$, положив $\varphi_t(x)=\sigma(1-t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Тогда существует гомотопия сфероидов $f_t: H\to X$, $0\leqslant t\leqslant 1$ такая, что $f_0=f$ и $f_t|H\setminus\Sigma=\varphi_t$ и, следовательно, $f_1:(H, H\setminus\Sigma)\to(X, x_0)$ является сфероидом индекса q множества X точки x_0.

Замечание. Если в предложении 1 рассматривать сфероиды f компактного типа, то гомотопию f_t можно построить так, чтобы она была гомотопией компактного типа.

В силу предложения 1, каждый путь $\sigma:(I,0,1)\to(X,x_0,x_1)$ порождает некоторое отображение $\sigma_*: F_g(X, x_1)\to F_g(X, x_0)$ совокупности сфероидов индекса g множества X в точке x_1 в совокупность сфероидов индекса g в точке x_0, которое порождает некоторое отображение $\sigma_*: \Pi_g(X, x_1)$ b $\Pi_g(X, x_0)$. При рассматривании сфероидов компактного типа соответственно возникают отображения:

$$\sigma^c_*: F^c_g(X, x_1)\to F^c_g(X, x_0) \text{ и}$$

$$\sigma^c_*: \Pi^c_g(X, x_1)\to \Pi^c_g(X, x_0.)$$

Согласно теореме Xy [4] всякая пара (P, Q), где P и Q абсолютно окрестностные ретракты (ANR) и Q замкнуто в P, абсолютно удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии.

Лемма. *Пусть P и Q подмножества гильбертова пространства H, являющиеся абсолютно окрестностными ретрактами, причем Q замкнуто в P, а Y — произвольное подмножество из H; пусть далее $f: P\to Y$ непрерывное отображение, принадлежащее классу K_0 и $\varphi_t: Q\to Y$ — гомотопия в классе K_0 отображения $\varphi_0=f|Q$, тогда существует гомотопия f_t в классе K_0 отображения f, являющаяся распространением гомотопии φ_t.*

Эта лемма играет центральную роль и позволяет в частности доказать следующее утверждение.

Предложение 2. Всякий путь $\sigma:(I,0,1)\to(X,x_0,x_1)$ порождает отображение $\sigma_*:\Pi_g(X, x_1)\to\Pi_g(X, x_0)$ причем:

1. σ^* — гомоморфизм
2. Если $\sigma, \sigma': (I,0,1)\to(X,x_0, x_1)$ эквивалентные пути, то $\sigma_*=\sigma'_*$.
3. Если $\sigma: (I,0,1)\to(X, x_0, x_1)$, а

$$\tau: (I,0,1)\to(X,x_1,x_2), \text{ то } (\sigma\tau)_*=\sigma_*\circ\tau_*.$$

4. Гомоморфизм $\sigma_*: \Pi_g(X, x_0)\to\Pi_g(X, x_0)$, порожденный постоянным путем $\sigma: I\to|x_0|$ является тождественным автоморфизмом группы $\Pi_g(X, x_0)$.
5. Если $f: X\to Y$ — отображение класса K_0, $\sigma:(I,0,1)\to(X, x_0, x_1)$ произвольный путь и $\tau=f\circ\sigma: (I,0,1)\to(Y,f(x_0), f(x_1)$, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_g(X, x_1) & \xrightarrow{f_*} & P_g(Y, f(x_1) \\ \downarrow \sigma_* & & \downarrow \tau_* \end{array}$$

$$P_g(X, x_0) \xrightarrow{f_*} P_g(Y, f(x_0)),$$

где f_* — гомоморфизм, индуцированный отображением f.

Замечание. Если вместо групп $\Pi_g(X, x)$ рассматривать группы $\Pi_g^c(X, x)$ компактного типа, то упомянутое выше отображение $\sigma_*^c: \Pi_g^c(X, x_1) \to \Pi_g^c(X, x_0)$ тоже удовлетворяет всем условиям, приведенным в предложении 2.

Основным результатом этой статьи является следующее утверждение

Теорема. *Всякий путь* $\sigma: (I, 0,1) \to (X, x_0, x_1)$, соединяющий точку x_0 с x_1, индуцирует изоморфизмы $\sigma_*: \Pi_g(X, x_1) \approx \Pi_g(X, x_0)$ *и* $\sigma_*^c: \Pi_g^c(X, x_1) \approx \Pi_g^c(X, x_0)$, *зависящее только от гомотопического класса пути* σ.

Согласно этой теореме бесконечномерные гомотопические группы $\Pi_g(X, x)$ (соответственно $\Pi_g^c(X, x)$ индекса g линейно связного подмножества X пространства H, построенные в различных точках $x \in X$ изоморфны между собой. Таким образом, эти группы, рассматриваемые как абстрактные группы, не зависят от выбора базисной точки и обозначаются через $\Pi_g(X)$ и $\Pi_g^c(X)$, $\Pi_g(X)$ называется бесконечномерной гомотопической группой индекса g компактного типа линейно связного множества $X \subset H$.

Приведенные выше все результаты остаются справедливыми и для бесконечномерных относительных гомотопических групп ([5]).

$\Pi_g(X, A, x_0)$ и $\Pi_g^c(X, A, x_0)$, а именно: всякий путь σ: $(I, 0,1) \to (A, x_0, x_1)$ множества A порождает изоморфизмы

$$\sigma_*: \Pi_g(X, A, x_1) \approx \Pi_g(X, A, x_0) \text{ и}$$

$$\sigma_*^c: \Pi_g^c(X, A, x_1) \approx \Pi_g^c(X, A, x_0)$$

Таким образом, когда подмножество $A \subset H$ линейно связно, все группы $\Pi_g(X, A, x)$ (соответственно $\Pi_g^c(X, A, x)$, построенные в различных точках $x \in A$, изоморфны между собой, т. е. не зависят от выбора базисной точки и обозначаются через $\Pi_g(X, A)$ и $\Pi^c_g(X, A)$.

В заключение отметим, что в силу условий 1—4 предложения 2 каждая из систем $\{\Pi_g(X, x); x \in X\}$ и $\{\Pi_g^c(X, x); x \in X\}$ образует локальную систему групп на множестве $X \subset H$ ([6]). Аналогично, в силу сказанного выше, каждая из систем $\{\Pi_g(X, A, x); x \in A\}$ и $\{\Pi_g^c(X, A, x); x \in A\}$ тоже образует локальную систему групп на множестве A.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

Անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբերի կախումը բազիսային կետից

Հոդվածում դիտարկված է իրական սեպարաբել H Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անվերջ չափանի հոմոտոպիկ $\Pi_q(X, x_0)$ և $\Pi^c_q(X, x_0)$ խմբերի կախումը բազիսային կետի ընտրությունից։

Պարզվում է, որ ինչպես և վերջավոր չափի դեպքում, $X \subset H$ բազմության միևնույն գծային կապակցության կոմպոնենտին պատկանող երկու տարբեր կետերում կառուցված անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբերը իզոմորֆ են իրար, այսինքն կախված չեն բազիսային կետի ընտրությունից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. А. Мирзаханян,* «Известия АН Арм. ССР», сер. Математика, т. VII, № 3, 212—225 (1973). [2] *Э. А. Мирзаханян,* «Известия АН Арм. ССР», сер. Математика, т. X, № 2, 153—162 (1975). [3] *В. Г. Болтянский,* «Известия АН Арм. ССР», сер. Математика, т. IX, № 2, 1974, 107—120. [4] *Ши Дзен Ху,* ДАН СССР, т. 57, № 3, (1947). [5] *Э. А. Мирзаханян,* ДАН Арм. ССР, т. 58, № 1, 15—20 (1974). [6] *N. E. Steenrod,* Ann. of Math, 44, 610—627, 1943.