ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIV 1977 5

УДК 517.43.

МАТЕМАТИКА

В. Н. Вардазарян

Спектральная теория одномерной случайной системы Дирака

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 23/III 1977)

В работе рассматриваются „типичные“ свойства одномерной системы Дирака, которую, следуя монографии [1], мы будем записывать в виде:

$$\frac{d}{dt} y_1 = y_1 + \rho_1(t, \omega) y_2 - \lambda y_2; \quad t \in R^1, \quad \omega \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt} y_2 = -y_2 - \rho_2(t, \omega) y_1 + \lambda y_1.$$

Потенциалы ρ_1 и ρ_2 будут предполагаться ограниченными, параметр ω принадлежит выборочному пространству Ω, снабженному вероятностной мерой P. Мы считаем, что эта мера инвариантна относительно трансляций $t \to t+h$, $h \in R^1$, так что с вероятностной точки зрения $(\rho_1(t, \omega), \rho_2(t, \omega))$ двумерный стационарный в узком смысле процесс.

Нас будут интересовать спектральные свойства системы (1), выполненные P-почти-наверное (п. н.) (именно такие свойства и называются „типичными“).

Теория случайного оператора Штурма—Лиувилля развита в [2-4]. Настоящая статья имеет много точек соприкосновения с этими работами. Так же как и в [2,3] мы сосредоточим внимание на специальном классе марковских потенциалов. Именно пусть K—компактное риманово многообразие класса C^∞, Δ-оператор Лапласа-Бельтрами, dy—риманова мера, $F_i(x): K \to R^1$, $i=1, 2$—гладкие неуплощающиеся функции. Последнее означает, что для некоторого n_0 и любой точки $x \in K$ найдутся такие $m_i \leq n_0$, $i=1, 2$, что $d^{m_i}(F_i(x)) \neq 0$.

Пусть X_t—диффузионный процесс на K с инфинитезимальным оператором $1/2\,\Delta$; $p(t, x, y)$—его переходная плотность. Тогда

$$\lim_{t \to \infty} p(t, x, y) = \frac{1}{V(K)} = \frac{1}{\int\limits_K dy},$$

причем сходимость экспоненциально быстрая. Если считать, что в какой-то момент t_0 процесс X_t-имеет равномерное распределение на K (с плотностью $1/V(K)$), то X_t, а значит и $F_i(X_t)$, $i=1,2$ превращаются в стационарные процессы с хорошими свойствами эргодичности. Отныне мы будем считать, что

$$\rho_1(t, \omega)=F_1(X_t), \quad \rho_2(t, \omega)=F_2(X_t).$$

2. Как и в ([1]) мы будем изучать спектральные свойства системы (1) в гильбертовом пространстве $L^2(R^1)$ вектор-функций $y(t)=(y_1(t), y_2(t))$ со скалярным произведением

$$(y, \bar{y})=\int\limits_{R_1}(y_1\bar{y}_1+y_2\bar{y}_2)dt.$$

Одним из основных объектов, связанных с (1) является матричная спектральная мера $\sigma=\begin{pmatrix}\xi & \eta\\ \eta & \zeta\end{pmatrix}$ и особенно, ее след: $\mathrm{Sp}\,\sigma=\rho=\xi+\zeta$. В частности, система Дирака имеет в $L^2(R^1)$ полную ортонормированную систему собственных функций тогда и только тогда, когда мера ρ чисто атомическая и спектр S системы Дирака (как множество на оси λ) совпадает с носителем меры ρ.

Меру ρ удобно (метод Левитана) строить предельным переходом. Рассмотрим на $[-L, L]$ задачу (1) с граничными условиями

$$y_1(-L)\sin\varphi^- - y_2(-L)\cos\varphi^- = 0,$$

$$y_1(L)\sin\varphi^+ + y_2(L)\cos\varphi^+ = 0. \tag{2}$$

Если $\lambda_0(L)$, $\lambda_{\pm1}(L)$, . . . и $y_0(t)$, $y_{\pm1}(t)$, . . ., $t\in[-L, L]$ собственные значения и собственные функции задачи (1), (2), то след соответствующей спектральной меры ρ_L определяется (для интервала Δ на оси λ) формулой

$$\rho_L(\Delta)=\sum_{\lambda_i\in\Delta}\frac{y_1^2(0, \lambda_i)+y_2^2(0, \lambda_i)}{\int\limits_{-L}^{L}|y(t, \lambda_i)|^2\,dt}\sum_{\lambda_i\in\Delta}\alpha_i(L). \tag{3}$$

Нам удобно (действуя по аналогии ([2]) и ([3])) выразить $\rho_L(\Delta)$ в других терминах. Положим в системе (1)

$$\begin{aligned} y_1(t, \lambda)&=r\sin\theta,\\ y_2(t, \lambda)&=r\cos\theta,\end{aligned}\qquad \frac{d\theta}{dt}=z(t, \lambda),\ \theta\in S^1,\ z\in R^1. \tag{4}$$

(Здесь S^1 — интервал $(0, \pi)$ с отождественными концами, $R^+=\{z, z>0\}$. Тот факт, что $\frac{d\theta}{dt}>0$ доказывается совсем просто).

Без труда получаются следующие формулы (более симметричные, чем аналогичные формулы в ([2]) и ([3])):

$$\frac{d\theta}{dt}=\sin 2\theta+(\lambda-\rho_2(x))\sin^2\theta+(\lambda-\rho_1(x))\cos^2\theta,$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{2}r(2\cos 2\theta+\sin 2\theta(\rho_1(x)-\rho_2(x))), \tag{5}$$

$$\frac{dz}{dt}=z(2\cos 2\theta+(\rho_1(x)-\rho_2(x))\sin 2\theta)+1.$$

3. Мы будем строить собственные функции $y_{\lambda_i}(t)$; $t\in[-L, L]$ склеивая в точке 0 решения уравнений (1) и (2), выпущенные из точек $\pm L$. С этой целью вводятся симметричные обозначения;

$$\theta^+(s)=\theta(-L+s),\quad \theta^+(0)=\varphi^+,\qquad \theta^-(s)=-\theta(L-s),\quad \theta^-(0)=\varphi^-,$$

$$r^+(s)=r(-L+s),\qquad r^-(s)=-r(L-s), \tag{6}$$

$$z^+(s)=\frac{\partial\theta^+}{\partial\lambda},\quad z^+(0)=0,\qquad z^-(s)=\frac{\partial\theta^-}{\partial\lambda},\quad z^-(0)=0,$$

$$0\leqslant s\leqslant L.$$

функции $\theta^\pm$, $r^\pm$, $z^\pm$ удовлетворяют прежним уравнениям (5) с очевидными модификациями. Из этих уравнений амплитуды $r^\pm$ еще не определяются однозначно. Положим $r^\pm(L)=r(0)=1$. Тогда мы можем построить при любом λ „квазирешение" (1), (2)

$$\hat{y}_\lambda(t)=\begin{cases}(r^+\sin\theta^+,\ r^+\cos\theta^+)(L+t), & -L\leqslant t\leqslant 0,\\ (r^-\sin\theta^-,\ r^-\cos\theta^-)(L-t), & 0\leqslant t\leqslant L,\end{cases} \tag{7}$$

удовлетворяющее системе (1) всюду, кроме, быть может, точки $t=0$.

Лемма 1. *При любом* λ

$$z_\lambda^+(L)+z_\lambda^-(L)=\frac{\partial(\theta^++\theta^-)}{\partial\lambda}(L)=\|\hat{y}_\lambda\|_{L^2(-L,L)}.$$

Лемма 2. *Собственные числа задачи* (1) *и* 2 *суть корни уравнения*

$$\theta_\lambda^+(L)+\theta_\lambda^-(L)\equiv 0(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Лемма 3. *Для любого* $\varepsilon>0$

$$\sum_{i\in\Delta}z_i(L)=\int_\Delta\frac{\delta((\theta_\lambda^+(L)+\theta_\lambda^-(L)\,\mathrm{mod}\,\pi)}{(z_\lambda^+(L)+z_\lambda^-(L))^\varepsilon}d\lambda,$$

где $z_i(L)$ — *атомы меры* ρ_L, *а* δ-*функцию в правой части следует понимать в смысле естественного предельного перехода.*

Леммы 1—3 доказываются примерно по тому же плану, что в ([2,3]) с использованием явных формул (5)—(7).

4. Следующие три леммы очень важны. Их вывод опирается на теорию вырожденных эллиптических и параболических операторов.

Они доказываются по плану, предложенному в [3], но с учетом ряда технических деталей.

Лемма 4. *Каждая из пар* $(\theta^+(t), X_t^+)$, $(\theta^-(t), X_t^-)$, $t \geq 0$ *представляет марковский эргодический диффузионный процесс. Если* $p_\lambda^\pm(t_1, (x_1, \theta_1), (x_2, \theta_2))$ — *соответствующие переходные плотности, то*

$$\lim p_\lambda^\pm(t, (x_1, \theta_1), (x_2, \theta_2)) = \pi_\lambda^\pm(x_1, \theta_1)$$

(сходимость экспоненциально быстрая).

Лемма 5. *При любом* λ *обе тройки процессов* $(X^\pm, \theta^\pm, z^\pm)$ *марковские и имеют при* $t > t_0 > 0$ *и* $\lambda \in \Delta$ *ограниченные (по совокупности аргументов) плотности* $p_\lambda^\pm(t, (x_1, \theta_1, z_1), (x_2, \theta_2, z_2))$.

Следующая лемма (точно так же как и ее аналог в [3]) играет в дальнейшем центральную роль. Она тесно связана с известной теоремой Ферстенберга.

Лемма 6. *Для любого* $0 < \delta < 1$, $\lambda \in \Delta$ *и любых* (x_1, θ_1), $t > 0$

$$M(z_t^{\pm\delta} | X_0^\pm = x_1, \theta^\pm(0) = \theta_1, z^\pm(0) = 0) < c < \infty.$$

Лемма 7. *Переходные вероятности* $P_\lambda^\pm$, *введенные в лемме* 5, *сходятся при* $t \to \infty$ *к единственной инвариантной мере с плотностью* $\pi_\lambda^\pm(x, \theta, z)$ *(сходимость ограниченная).*

Из лемм 1—6 по тому же плану, что и в [2,3], но в ряде случаев с серьезными техническими изменениями выводятся следующие результаты.

Теорема 1. *Для любого интервала* Δ

$$M\sigma_L(\Delta) = \int_\Delta d\lambda \int_{S'} \pi_\lambda^+ \pi_\lambda^- \, dx d\theta.$$

Теорема 2. *Существует плотность состояния, т. е.*

$$\lim_{L \to \infty} \frac{H(\lambda, \Delta)}{2L} = \int_\Delta n(\lambda) d\lambda,$$

где $H(\lambda, \Delta)$ — число $\{\lambda_i(L) \in \Delta\}$, *причем* $n(\lambda) = \int_S \pi_\lambda^+(\theta) \pi_\lambda^-(\theta) d\theta$, *а это значит, что* $\int_\Delta n(\lambda) d\lambda = M\rho(\Delta)$.

Теорема 3. *Спектр* S *системы* (1) *с вероятностью* 1 *совпадает с своим существенным спектром и с замыканием множества* $\{\lambda;\ n(\lambda) > 0\}$. *Этот спектр состоит из оси* $-\infty < \lambda < \infty$ *с выкинутым интервалом* (λ_1, λ_2), *где*

$$\lambda_1 = \max_{(\rho_1, \rho_2)} 1/2(\rho_1(x) + \rho_2(x) - \sqrt{(\rho_1(x) - \rho_2(x))^2 + 4}),$$

$$\lambda_2 = \min_{(\rho_1, \rho_2)} 1/2(\rho_1(x) + \rho_2(x) + \sqrt{(\rho_1(x) - \rho_2(x))^2 + 4}).$$

Подчеркнем, что теоремы 2 и 3 доказываются существенно труднее, чем их аналоги для уравнения Штурма—Лиувилля.

5. Следующая простая лемма объясняет основную идею доказательства теоремы о точечном спектре.

Лемма 8. *Пусть ρ_L — последовательность точечных мер на Δ, слабо сходящихся к конечной мере ρ. Пусть также $\sigma_i(L)$ — атомы меры ρ_L. Если*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{L\to\infty}\sum_i \sigma_i^{1+\varepsilon}(L)=\rho(\Delta),$$

то предельная мера ρ чисто точечная.

Используя это утверждение и предыдущие технические леммы можно установить один из двух центральных результатов настоящей работы.

Теорема 4. *Система Дирака (1) с описанным выше случайным потенциалом имеет с вероятностью 1 всюду плотную на S точечную однократную спектральную меру (множество S описано в теореме 3).*

Следующая теорема обобщает основной результат работы ([3]) на системы Дирака.

Теорема 5. *С вероятностью 1 каждая из функций $y_n(t)$ собственного ортонормированного базиса системы Дирака в $L^2(R^1)$, существование которого установлено в предыдущей теореме, экспоненциально убывает, то есть найдутся постоянные t_l, c_l, $\gamma_l>0$ такие, что $|y_n(t)|\le c_l e^{-\gamma_l|t-t_l|}$, причем постоянную γ_l можно выбрать равномерно положительной в каждом интервале „энергии" Δ.*

Как и в ([3]) для доказательства этой теоремы приходится привлекать случайные процессы, зависящие от двух параметров λ, λ' и вычислять математические ожидания типа моментов второго порядка от спектральной меры. Приведем формулировку одного промежуточного результата, представляющего самостоятельный интерес (см. для сравнения ([3]) и ([4])).

Теорема 6. *Для любого Δ*

$$M|\rho(\Delta)|^2=\int_\Delta d\lambda\int_{K\times S^1\times R^+}\frac{\pi_\lambda^+(x,\theta,z_1)\,\pi_\lambda^-(x,-\theta,z_2)}{z_1+z_2}\,dz_1\,dz_2\,d\theta\,dx+$$

$$+2\int_{\Delta\times\Delta}d\lambda\,d\lambda'\int_{K\times S^1\times S^1}\pi^+_{\lambda,\lambda'}(x,\theta,\theta_1)\,\pi^-_{\lambda,\lambda'}(x,-\theta,-\theta_1)\,dx\,d\theta\,d\theta_1,$$

где $\pi^\pm_{\lambda,\lambda'}(x,\theta,\theta_1)$ — плотности инвариантных мер марковских процессов $(X^+,\theta^+_\lambda,\theta^+_{\lambda'})$.

6. Мы совсем не касались здесь асимптотических задач, в частности, вопросов об асимптотическом поведении спектральной меры или плотности состояний как при $\lambda\to\infty$, так и при $\lambda\to\lambda_{кр}$, где $\lambda_{кр}$ — концы лакуны в спектре S (см. теорему 3). Это можно делать применяя комбинированные, аналитические и вероятностные методы. В частности, так же как и в работе ([5]), очень полезной оказывается формула Каца—Фейнмана.

В заключение благодарю С. А. Молчанова, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Գ. Ն. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Դիրակի միաչափ պատահական օպերատորի սպեկտրալ տեսություն

Հոդվածում դիտարկվում են Դիրակի միաչափ օպերատորներ պատահական $(p_1(t,\omega), p_2(t,\omega))$-վեկտոր պոտենցիալով՝

$$\frac{d}{dt}y_1 = y_2 + p_1(t,\omega)y_2 - \lambda y_2; \quad t\in R^1, \quad \omega\in\Omega \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}y_2 = -y_1 - p_2(t,\omega)y_1 + \lambda y_1.$$

Ստացված են մի քանի սպեկտրալ հատկություններ վերը նշված օպերատորների համար։

Գլխավոր արդյունքներն են՝ միավոր հավանականությամբ պատահական պոտենցիալով Դիրակի օպերատորը սպեկտրի վրա ունի ամենուրեք խիտ կետային սպեկտրալ չափ, և որ միավոր հավանականությամբ $L^2(R^1)$-ում (1) օպերատորի օրթոնորմավորված բազիսը կազմում են $y_j(t)$ ֆունկցիաները լոկալիզացված են։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. Введение в спектральную теорию. М., 1970. [2] И. Я. Гольдшейд, С. А. Молчанов, Л. А. Пастур. «Функциональный анализ», т. 11, № 1, 1—10 (1977). [3] С. А. Молчанов. «Известия АН СССР», сер. Математика, т. 41, № 2, 231—254 (1977). [4] И. Я. Гольдшейд, С. А. Молчанов. ДАН СССР, т. 230, № 4, 761—764 (1976). [5] Л. А. Пастур. УМН, т. XXVIII, № 1 (169), стр. 3—64 (1973).