ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIV 1977 5

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

В. А. Авакян

О спектральной задаче с рациональной функцией от λ в краевом условии

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 28/II 1977)

1. В этой заметке изучается формула распределения собственных значений (с. з.) краевой задачи *.

$$l[y(x)] = -y''(x) + q(x)\,y(x) = \lambda y(x)$$

$$y(0) - R(\lambda)y'(0) = 0 \qquad (1)$$

$$y(x) \in L_2(0, +\infty)$$

где $R(\lambda) = \dfrac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ — вещественная несократимая рациональная дробь степени n, т. е. $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0$, $Q(\lambda) = b_n\lambda^n + \ldots + b_1\lambda + b_0$ и по крайней мере одно из чисел a_n или b_n отлично от нуля.

Ниже мы установим некоторые неравенства между функциями распределения с. з. задачи (1) с разными рациональными функциями от λ в граничных условиях. Для этого сначала докажем некоторые теоремы относительно двух расширений (с выходом из исходного пространства (см. [1] стр. 401) абстрактного симметрического оператора A_0. Далее покажем, что задачу (1) можно трактовать как задачу на с. з. некоторого линейного оператора T в более широком гильбертовом пространстве Ω [2]. Откуда, принимая во внимание абстрактные теоремы, получим интересующие нас результаты для краевой задачи (1).

2. В этом пункте мы приведем некоторые утверждения из работы [3], которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть A_0 некоторый симметрический оператор в гильбертовом пространстве H с конечными индексами дефекта (m, m).

Определение 1. Пусть $\tilde{H}$ некоторое гильбертово простран-

* Условия, которые мы налагаем на $q(x)$ те же, что в [3] (см. гл. XII).

ство, которое содержит H. Оператор $\tilde{A}$ называется самосопряженным расширением A_0 с выходом из пространства H, если $\tilde{A}$ самосопряженный оператор в пространстве $\tilde{H}$ и является расширением A_0. (При этом считается, что $\overline{D(A_0)} = H$ и $\overline{D(\tilde{A})} = \tilde{H}$).

Определение 2. Если λ — точка регулярного типа для оператора A_0, то множество F_λ элементов, ортогональных к $R(A-\lambda E)$, называется λ — дефектным подпространством.

Теперь обозначим через $B = H \ominus \overline{D(A_0)}$, а через G_λ — проекцию B на дефектное подпространство F_λ. Как легко видеть, оператор P_{F_λ} ортогонального проектирования на F_λ устанавливает между B и G_λ однозначное соответствие.

Определение 3. Ортогональное дополнение F'_λ в F_λ к G_λ называется λ — полудефектным подпространством оператора A_0.

$$F'_\lambda = F_\lambda \ominus G_\lambda .$$

Имеют место следующие утверждения:

Предложение 1. Размерность λ — полудефектных подпространств симметрического оператора A_0 одинакова для всех λ, лежащих в одной из полуплоскостей (верхней или нижней) комплексной плоскости.

Предложение 2. Пусть A_0 — замкнутый симметрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\tilde{H}$ с равными дефектными числами. Общая формула его самосопряженных расширений $\tilde{A}$ в пространстве $\tilde{H}$ дается формулой

$$\tilde{A}(g+\varphi-U\varphi) = A_0 g + \lambda g - \bar{\lambda} U\varphi, \quad g \in D(A_0), \quad \varphi \in F_\lambda$$

где U изометрический оператор из пространства F_λ в $F_{\bar{\lambda}}$.

Замечание 1. Оказывается, что каждый элемент $\tilde{g}$ области определения $D(\tilde{A})$ самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A_0, имеющий в силу предложения 2 представление

$$\tilde{g} = g + \varphi - U\varphi,$$

где $g \in D(A_0)$, $\varphi \in D(U) \subset F_\lambda$, $U\varphi \in F_{\bar{\lambda}}$, однозначно определяет "порождающие" его элементы $g \in D(U)$, $\varphi \in F_\lambda$.

3. Используя выше приведенные результаты, можно доказать следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть A_0 рассмотренный в начале п. 2 симметрический оператор, а A_1 и A_2 некоторые самосопряженные расширения с выходом из H соответственно в гильбертовое пространство H_1 и H_2 такие, что $H_1 = H \oplus H'$, $\dim H' = n_1 < \infty$, $H_2 = H \oplus H''$ $\dim H'' = n_2 < \infty$.*

Обозначим через

$$N_i(\alpha, \beta) = \sum_{\alpha < \lambda_\alpha(A_i) < \beta} 1 \quad (i = 1, 2)$$

число с. з. оператора A_i $(i = 1, 2)$, лежащих в интервале (α, β). Тогда имеет место оценка

$$N_2(\alpha, \beta) - m - n_2 \leqslant N_1(\alpha, \beta) \leqslant N_2(\alpha, \beta) + m + n_1.$$

Доказательство. Из определений 2 и 3 следует, что

$$F_\lambda^1 = \overline{F}_\lambda^1 \oplus H' \text{ и } F_\lambda^2 = \overline{F}_\lambda^2 \oplus H',$$

где $\dim \overline{F}_\lambda^1 = \dim \overline{F}_\lambda^2 = m$, F_λ^1 и F_λ^2 дефектные подпространства оператора A_0 соответственно в пространствах H_1 и H_2, а $\overline{F}_\lambda^1$ и $\overline{F}_\lambda^2$ его полудефектные подпространства, которые очевидно совпадают с дефектными подпространствами оператора A_0 в пространстве H. Следовательно, в силу предложения 1 оператор A_0 в пространстве H_1 (соответственно в H_2) имеет индексы дефекта $(m + n_1, m + n_1)$ (соответственно $(m + n_2, m + n_2)$). А из предложения 2 следует, что области определения операторов A_1 и A_2 задаются следующими формулами:

$$D(A_1) = D(A_0) \oplus (E - U^1) F_\lambda^1, \tag{2}$$

$$D(A_2) = D(A_0) \oplus (E - U^2) F_\lambda^2, \tag{3}$$

где U^1 и U^2 изометрические операторы соответственно на подпространствах F_λ^1 и F_λ^2.

Обозначим через $H_{N_1(\alpha,\beta)}$ собственное подпространство оператора A_1, соответствующее с. з. из интервала (α, β) и пусть размерность $H_{N_1(\alpha,\beta)}$ по модулю $D(A_2)$ равна r. Тогда, учитывая, что $H_{N_1(\alpha,\beta)} \subset \subset D(A_1)$ и $D(A_0) \subset D(A_2)$, из формулы (2) получается соотношение

$$\dim H_{N_1(\alpha,\beta)} / D(A_2) = r \leqslant \dim D(A_1)/D(A_2) \leqslant m + n_1. \tag{4}$$

Используя соотношение (4), можно показать, что существуют $N_1(\alpha, \beta) - m - n_1$ линейно независимых векторов h_k из $H_{N_1(\alpha,\beta)}$, которые также принадлежат $D(A_2)$. Теперь, принимая во внимание предложение 2 и замечание 1, мы напишем равенства:

$$A_2 h_k = A_1 h_k = \sum_{j=1}^{N_1(\alpha,\beta)} \gamma_{kj} \lambda_j^{(1)} e_j^{(1)}, \quad k = 1, 2 \ldots, \quad N_1(\alpha, \beta) - m - n_1$$

Здесь $\lambda_j^{(1)}$ с. з. оператора A_1, удовлетворяющие неравенствам $\alpha<\lambda_j^{(1)}<\beta$, а $e_j^{(1)}$ — соответствующие собственные векторы.

Таким образом мы нашли $N_1(\alpha, \beta) - m - n_1$ линейно независимых векторов, которые удовлетворяют неравенству

$$\alpha \| h_k \|^2 \leqslant (A_2 h_k, h_k) \leqslant \beta \| h_k \|^2 \qquad (5)$$

Но так как количество точек спектра самосопряженного оператора A_2 лежащих в интервале $\Delta = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$, равно максимальной размерности линейных многообразий $G \subset D(A)$, на которых выполнено неравенство (см. ([1]), стр. 277).

$$\| (A - \lambda_0 E) g \| \leqslant \varepsilon \| g \| ,$$

то из (5) следует, что

$$N_2(\alpha, \beta) \geqslant N_1(\alpha, \beta) - m - n_1 \qquad (6)$$

Если в вышеприведенных рассуждениях заменить A_1 на A_2, то будем иметь

$$N_1(\alpha, \beta) \geqslant N_2(\alpha, \beta) - m - n_2 \qquad (7)$$

Объединяя оценки (6) и (7), получим утверждение теоремы 1.

4. Теперь, используя теорему 1, докажем подобный результат для j — самосопряженных расширений оператора A_0 (см. ([4])).

Теорема 2. *Пусть A_0 симметрический оператор с индексами дефекта (m, m) $(m<\infty)$ в пространстве H, а A^1 и A^2 некоторые его j — самосопряженные расширения с выходом из H, на пространства Понтрягина $\Pi_{\varkappa_1}$ и $\Pi_{\varkappa_1}$ такие, что $\Pi_{\varkappa_1} = H^1_- \oplus H^1_+$ и $\Pi_{\varkappa_2} = H^2_- \oplus H^2_+$, где $\dim H^1_- = \varkappa_1 < \infty$, $\dim H^2_- = \varkappa_2 < \infty$.*

Кроме того предположим, что $H \subset H^1_+$ и $H \subset H^2_+$. Тогда имеет место оценка

$$N_1(\alpha, \beta) - m - l_2 - 2\varkappa_1 - \varkappa_2 \leqslant N_1(\alpha, \beta) \leqslant N_2(\alpha, \beta) + m + l_1 + 2\varkappa_2 + \varkappa_1,$$

где $l_1 = \dim \Pi_{\varkappa_1}/H < \infty$, $l_2 = \dim \Pi_{\varkappa_2}/H < \infty$, а $N_1(\alpha, \beta)$, $N_2(\alpha, \beta)$ те же, что и в теореме 1.

Доказательство. Обозначим через P_1^l, P_2^l операторы ортогонального проектирования пространства $\Pi_{\varkappa_l}$ соответственно на H^l_- и H^l_+ $(l = 1, 2)$. Тогда оператор A^l допускает следующее матричное представление

$$A^l = \begin{pmatrix} A^l_{11} & A^l_{12} \\ A^l_{21} & A^l_{22} \end{pmatrix} \quad (l = 1, 2) \qquad (8)$$

где $A^i_{jk} = P_j A^i P_k$ $(j, k = 1, 2)$ операторы из H^i_- в H^i_+ и $A^i_{11} = (A^i_{11})^*$, $A^i_{12} = -(A^i_{21})^*$, $A^i_{22} = (A^i_{22})^*$ (в силу i — самосопряженности операторов A^1 и A^2).

Заметим, также, что A^1_{22} и A^2_{22} являются самосопряженными расширениями оператора A_0 соответственно на пространстве $H^1_+ = H \oplus W_1$ и $H^2_+ = H \oplus W_2$, где $\dim W_1 = l_1 - x_1$, $\dim W_2 = l_2 - x_2$.

Пусть $N^1_{22}(\alpha, \beta)$ и $N^2_{22}(\alpha, \beta)$ числа с. з., лежащих в интервале (α, β) соответственно для операторов A^1_{22} и A^2_{22}.

Тогда в силу теоремы 1 можем написать:

$$N^2_{22}(\alpha, \beta) - m - l_2 + x_2 \leqslant N^1_{22}(\alpha, \beta) \leqslant N^2_{22}(\alpha, \beta) + m + l_1 - x_1. \qquad (9)$$

Далее, полагая

$$B^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^i_{22} \end{pmatrix}, \quad C^i = \begin{pmatrix} A^i_{11} & -(A^i_{21})^* \\ A^i_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

из представления (8) будем иметь $A^i = B^i + C^i$, где B^i самосопряженный оператор, а C^i — не более чем $2x_i$ — мерный оператор. Следовательно

$$N^i_{22}(\alpha, \beta) - 2x_i \leqslant N_i(\alpha, \beta) \leqslant N^i_{22}(\alpha, \beta) + 2x_i \quad (i = 1, 2). \qquad (10)$$

Из оценок (9) и (10) следует утверждение теоремы.

5. Введем пространство Ω, элементы которого — наборы из $n+1$ компонент $U = |y(x), u_1, u_2, \ldots, u_n|$, причем $y(x) \in L_2(0, +\infty)$, а u_k — комплексные числа. Обозначим через $U^0 = |u_1, u_2, \ldots, u_n|$.

Определим оператор T в пространстве Ω, область определения $D(T)$ которого состоит из векторов $U = |y(x), u_1, u_2, \ldots, u_n|$ таких, что $y(x)$ принадлежит максимальной области определения дифференциального выражения l, а $u_1 = a_n y'(0) - b_n y(0)$. Для $U \in D(T)$ положим

$$TU = |l[y(x)], u_2 - a_{n-1} y'(0) + b_{n-1} y(0), u_3 - a_{n-2} y'(0) + b_{n-2} y(0), \ldots - a_0 y'(0) + b_0 y(0)|.$$

Ясно, что T — линейный замкнутый оператор с компактной резольвентой.

Имеет место

Предложение 3. Задача на с. з. оператора T эквивалентна краевой задаче (1).

Теперь зададим в Ω (в общем случае индифинитное) скалярное произведение

$$\langle U, V \rangle = \int_0^\infty u(x)\overline{v(x)}dx + U^0 M V^0, \qquad (11)$$

где $U, V \in \Omega$, а M — некоторая вещественная симметрическая матрица порядка n. Очевидно, что (11) — конечного ранга индефинитности

$\varkappa(0 \leqslant \varkappa \leqslant n)$. Пространство Ω со скалярным произведением (11) становится пространством Понтрягина $\Pi_\varkappa$.

Если степень $P(\lambda)$ небольше степени $Q(\lambda)$, то через s обозначим индекс Коши функции $R(\lambda)$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$; в противном случае через s обозначим индекс Коши функции $-1/R(\lambda)$ также в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение (см. [2]).

Предложение 4. В пространстве Ω можно выбрать, и притом однозначным образом, J—метрику вида (11) так, чтобы оператор T был в ней J—самосопряженным. При таком выборе метрики (11) $\varkappa = \frac{n-s}{2}$. Метрика (11) дефинитна ($\varkappa = 0$) в том и только в том случае, когда рациональная функция $R(\lambda)$ отображает верхнюю полуплоскость в себя.

Теперь обозначим через L_0 минимальный оператор, соответствующий дифференциальному выражению l^*. Из предложения 3 и первой части предложения 4 следует, что задачу (1) можно трактовать как некоторое J—самосопряженное расширение симметрического оператора L_0 в пространстве Понтрягина, которое удовлетворяет условиям теоремы 2. Следовательно, учитывая, что при некоторых условиях на $q(x)$ (см. [3], гл. V) всякое самосопряженное расширение оператора L_0 имеет дискретный спектр, с помощью теоремы 2 получаем следующий результат:

Теорема 3. *Спектр задачи* (1) *дискретный, а число с. з.* $N_1(\alpha, \beta)$, *лежащих в интервале* (α, β) *удовлетворяет неравенствам* (*см. вторую сноску*):

$$N_0(\alpha, \beta) - k - 2\frac{n-s}{2} < N_1(\alpha, \beta) < N_0(\alpha, \beta) + k + n + \frac{n-s}{2} \quad (k = 1, 2), \tag{12}$$

где $N_0(\alpha, \beta)$—*число с. з. некоторого самосопряженного расширения оператора* L_0 *в интервале* (α, β).

Замечание 2. Если $R(\lambda)$ отображает верхнюю полуплоскость в себя, то, принимая во внимание вторую часть предложения 4 с помощью теоремы 1, получим следующее уточнение формулы (12):

$$N_0(\alpha, \beta) - k \leqslant N_1(\alpha, \beta) \leqslant N_0(\alpha, \beta) + k + n \quad (k = 1, 2)$$

Из этих результатов вытекает, что густота собственных значений задачи (1) с разными рациональными функциями от λ в граничном условии одинакова и равна густоте с. з. задачи (1) с самосопряженным граничным условием, например $y(0) = 0$.

Автор искренне благодарит своего научного руководителя А. Г. Костюченко за ценные советы и обсуждения.

Московский государственный университет

---

* Известно, что индексы дефекта оператора L_0 в пространстве $L_2(0, +\infty)$ равны (1.1) или (2.2) (см. (1) добавление II).

Վ. Հ. ԱՎԱԳՅԱՆ

Սպեկտրալ խնդրի մասին, որի եզրային պայմանի մեջ մտնում է λ-ից կախված ռացիոնալ ֆունկցիա

Դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիրը՝

$$l[y(x)] = -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

$$y(0) - R(\lambda)y'(0) = 0,$$

որտեղ $R(\lambda)$-ն ռացիոնալ ֆունկցիա է։ Ուսումնասիրվում է նրա սեփական արժեքների բաշխման բանաձևը։ Ապացուցված է, որ վերը դրված խնդիրն ունի դիսկրետ սպեկտր և նրա սեփական արժեքների խտությունը համընկնում է ինքնահամալուծ եզրային պայմաններով խնդրի սեփական արժեքների խտության հետ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966. [2] *Е. М. Русаковский.* Операторная трактовка граничной задачи со спектральным параметром, полиномиально входящим в граничные условия. функц. анализ и его прилож., т. 9, № 4 (1975). [3] *М. А. Красносельский.* Укр. мат. журнал», № 1, 1949. [4] *Л. С. Понтрягин.* «Известия АН СССР», сер. мат., т. 8 вып. 6, стр. 243—280 (1944). [5] *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян.* Введение в спектральную теорию. М., «Наука», 1970.