

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. О. Саркисян

О цилиндрическом изгибе пластинки жесткими штампами

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 24/IX 1976)

Контактным задачам теории пластинок посвящено большое число исследований, достаточно полная библиография которых содержится в работе (1).

Известно (2), что при решении задачи изгиба пластинки гладкими жесткими штампами по теории Кирхгофа, на концах зоны контакта появляются сосредоточенные силы. 1) невозможно приложить на концах пластинки конечные силы и изгибать ее на данную поверхность и 2) чтобы иметь первоначальный контакт пластинки со штампом, надо приложить на штамп конечную силу. Эти противоречия можно устранить, если принимать теорию пластинки, где учитываются деформации поперечного сдвига (3).

Решение задачи в такой постановке показывает, что контактное давление максимально в концах зоны контакта, где в действительности оно должно быть равно нулю (4). И это противоречие устраняется если учесть поперечное обжатие пластинки, как показано в работе (5), а как показывают численные результаты, распределение контактного давления и величины максимальных нормальных напряжений достаточно близки к соответствующим величинам, определяемых по теории упругости (5,6). Учесть поперечное обжатие пластин и оболочек в контактных задачах предложено также в работе (7), в которой интегральное уравнение первого рода для контактного давления с гладкими ядрами, как некорректная задача в такой постановке, превращается в интегральное уравнение второго рода.

В настоящей работе решена задача цилиндрического изгиба пластинки жесткими штампами с учетом поперечных сдвигов, поперечного нормального напряжения и поперечного обжатия по новой итерационной теории С. А. Амбарцумяна (8) и по теории Рейсснера Нагди (9). Задача решается в замкнутом виде. Определяются контактное давление, величина зоны контакта и осадка штампа в зависимости от величины приложенной нагрузки. Решается также задача о плоском

штампе (отметим, что при решении этой задачи по теории Кирхгофа, контактное давление в зоне контакта равно нулю, а на концах оно превращается в сосредоточенную силу и момент, а при решении этой задачи с учетом только поперечных сдвигов получается распределенное контактное давление в зоне контакта и сосредоточенные силы на его концах). Показано, что с учетом поперечного обжатия и поперечных сдвигов эти противоречия устраняются. Приводится числовой пример.

1. Рассмотрим шарнирно опертую пластину толщиной h , длиной $2l$ нагруженную жестким гладким штампом (рис. 1). Штамп имеет цилиндрическую поверхность основания. Предполагаются выполнен-

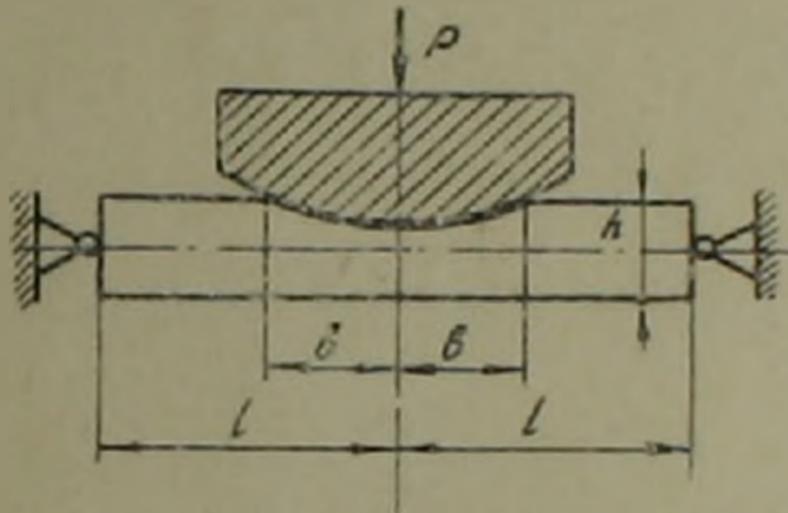


Рис. 1

ными те условия, при которых происходит цилиндрический изгиб пластинки. Предполагается также, что при деформации пластинка и штамп плотно прилегают друг к другу. Влиянием трения между этими двумя телами пренебрегаем. Как исходная теория пластинки берется новая итерационная теория, предложенная С. А. Амбарцумяном (*). В этой теории, построенной методом гипотез, учитываются поперечные сдвиги, поперечные нормальные напряжения и поперечное обжатие пластинки. Согласно этим гипотезам по сути дела приближенно принимаются:

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^0, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^0, \quad \sigma_z = \sigma_z^0 \quad (1.1)$$

$$e_{xz} = e_{xz}^0, \quad e_{yz} = e_{yz}^0, \quad e_z = e_z^0 \quad (1.2)$$

где с нулями обозначены соответственно поперечные напряжения и деформации пластинки, определяемые по теории Кирхгофа.

В случае цилиндрического изгиба пластинки решая уравнения теории Кирхгофа и интегрируя уравнения равновесия теории упругости, легко получить:

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x^0}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right), \quad \sigma_z^0 = -\frac{3q}{2h} \left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right) - \frac{q}{2} \quad (1.3)$$

$$e_{xz}^0 = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{3Q_x^0}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right), \quad e_z^0 = -\frac{3q}{2Eh} \left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right) - \frac{q}{2E} - \frac{12\nu(1+\nu)}{Eh^3} M_x^0 \cdot z, \quad (1.4)$$

где q — распределенное нормальное давление на верхней поверхности пластинки. После несложных преобразований легко получаются выражения перемещений для точек пластинки, например:

$$\bar{w}(x, y, z) = w(x, y) - \frac{3q}{2Eh} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{3h^2} \right) - \frac{q}{2E} z - \frac{12\nu(1-\nu)}{Eh^3} M_x^0 \cdot \frac{z^2}{2}, \quad (1.5)$$

где $w(x, y)$ — прогиб срединной плоскости пластинки. Имея значения перемещений можно определить продольную деформацию, напряжение и изгибающий момент, последний определяется выражением:

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{dQ_x^0}{dx} + \frac{13h^4}{4480(1-\nu^2)} \frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{\nu(1+\nu)h^2}{40E} \frac{d^2 M_x^0}{dx^2} - \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} q. \quad (1.6)$$

Поставленная контактная задача по теории Кирхгофа имеет следующее решение:

$$M_x^0 = -Dx, \quad Q_x^0 \equiv 0, \quad (1.7)$$

где x — кривизна штампа.

Следовательно из (1.6) для изгибающего момента получается:

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{13h^4}{4480(1-\nu^2)} \frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} q. \quad (1.8)$$

Дифференциальное уравнение равновесия не отличается от соответствующих уравнений теории Кирхгофа (6):

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = q. \quad (1.9)$$

Подставляя (1.8) в (1.9) и принимая во внимание условие контакта

$$\bar{w} \left(x, y, \frac{h}{2} \right) = \frac{h}{2} - d + \frac{x^2}{2}, \quad (1.10)$$

где d — жесткое перемещение штампа, получается разрешающее уравнение относительно контактного давления:

$$\frac{d^4 q}{d\xi^4} + A \frac{d^2 q}{d\xi^2} + Bq = 0, \quad -\beta \leq \xi \leq \beta \quad (1.11)$$

$$A = \frac{126\nu(1+\nu)}{37} \left(\frac{l}{h} \right)^2, \quad B = \frac{1260(1-\nu^2)}{37} \left(\frac{l}{h} \right)^4 \quad (1.12)$$

где $\beta = b/l$ — безразмерная величина контакта, а $\xi = x/l$ — безразмерный абсцисс точек пластинки.

Разрешающее уравнение, аналогичное (1.11), можно получить и другими приближенными теориями пластинок, учитывающих поперечные деформации пластинки. В качестве отправной точки воспользуемся, например, известной теорией Рейсснера-Нагди ⁽⁹⁾, где получены уравнения равновесия и зависимости напряжения-деформация для тонкой пластинки с учетом влияния поперечных сдвигов, поперечного нормального напряжения и поперечного обжатия:

$$\frac{dQ_x}{dx} + q = 0, \quad \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \quad (1.13)$$

$$\varepsilon + \frac{d(w + cH)}{dx} = b \frac{12}{5} \frac{1+\nu}{Eh} Q_x \quad (1.14)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} - \frac{1}{D} M_x + \frac{6\nu(1-\nu)}{5Eh} q = 0 \quad (1.15)$$

$$H = \left(\frac{9}{14} - \frac{3\nu^2}{5} \right) \frac{h}{20E} q - \frac{3\nu(1+\nu)}{10Eh} M_x \quad (1.16)$$

$$\bar{w}(x, y, z) = w(x, y) + c \left[z\varpi(x, y) + \frac{z^2}{2} \varpi''(x, y) \right] \quad (1.17)$$

$$\varpi' = \frac{q}{2E}, \quad H = \frac{h^2}{40} \varpi'' \quad (1.18)$$

здесь ε — угол поворота нормального элемента пластинки. Коэффициенты b и c введены для обозначения вкладов членов, связанных соответственно с поперечными деформациями сдвига и нормальными деформациями: при $c=0$ получаются уравнения теории пластинок, учитывающие только поперечные сдвиги ⁽¹⁰⁾, а при $b=c=0$ — уравнения теории Кирхгофа.

Условие контакта имеет прежний вид (1.10). Из системы уравнений (1.1) — (1.8) с учетом (1.10) для контактного давления q легко получается разрешающее дифференциальное уравнение вида (1.11), где коэффициенты A и B теперь следующие:

$$A = \frac{12(1-\nu^2)}{5 \left(\frac{53}{140} - \frac{3\nu^2}{25} \right)} \left(\frac{l}{h} \right)^2, \quad B = \frac{12(1-\nu^2)}{\frac{53}{140} - \frac{3\nu^2}{25}} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \quad (1.19)$$

Следует сказать, что для реакции q , по теориям учитывающим только поперечные сдвиги, получается уравнение второго порядка ⁽¹¹⁾, в отличие от этого уравнения (1.11) четвертого порядка.

Линейно — независимые решения уравнения (1.11) будут:

$$\operatorname{ch} m\xi; \operatorname{cos} n\xi; \operatorname{sh} m\xi; \operatorname{cos} n\xi; \operatorname{ch} m\xi; \operatorname{sin} n\xi; \operatorname{sh} m\xi; \operatorname{sin} n\xi,$$

учитывая четность контактного давления относительно ξ , получается:

$$q(\xi) = C_1 \operatorname{ch} m \xi \operatorname{cos} n \xi + C_2 \operatorname{sh} m \xi \operatorname{sin} n \xi \quad (1.20)$$

где

$$2m^2 = \sqrt{B} + \frac{A}{2}, \quad 2n^2 = \sqrt{B} - \frac{A}{2} \quad (1.21)$$

C_1 и C_2 произвольные постоянные, которые определяются из условия равновесия штампа

$$\int_0^{\beta} q(\xi) d\xi = \frac{P}{2l} \quad (1.22)$$

и из условия обращения реакции в нуль на концах зоны контакта. При этих условиях из (1.20) получается выражение контактного давления между штампом и пластинкой:

$$q(\xi) = \frac{P(m^2 + n^2)}{2l} \cdot \frac{f(\xi)}{n \operatorname{sh} 2m\beta - m \operatorname{sin} 2n\beta} \quad (1.23)$$

похожая на аналогичную формулу, полученную в (4), здесь:

$$f(\xi) = \operatorname{sh} m(\beta - \xi) \operatorname{sin} n(\beta + \xi) + \operatorname{sh} m(\beta + \xi) \operatorname{sin} n(\beta - \xi) \quad (1.24)$$

Решение систем уравнений (1.13) – (1.18) вне зоны контакта, где следует положить $q = 0$, имеет вид:

$$Q = C, \quad M = Cx + D_1, \quad (1.25)$$

$$z = \frac{C}{2D} x^2 + \frac{D_1}{D} x + E \quad (1.26)$$

$$w = \left[\frac{12}{5} \frac{1+\nu}{Eh} + \frac{3\nu(1+\nu)}{10Eh} \right] Cx - \frac{C}{6D} x^2 - \frac{D_1}{2D} x^2 - Ex + F \quad (1.27)$$

используя четыре условия стыковки на конце зоны контакта: непрерывность Q_x , M_x , φ , w , а также три граничных условия на конце пластинки: $w = 0$, $M_x = 0$, $Q_x = P/2$ при $x = l$, легко получить соотношение между силой P , прижимающей штамп и величиной зоны контакта β , а также жесткое перемещение штампа d :

$$P^2 = \frac{1}{(1-\beta)^2}, \quad a^2 = 1 + \frac{h}{l} \cdot \frac{R}{l} + \frac{\nu}{4(1-\nu)} \left(\frac{h}{l} \right)^2 - (1-\beta)^2 + \frac{\phi_1}{\phi}, \quad (1.28)$$

где

$$P^2 = \frac{PlR}{2D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad a^2 = \frac{2dR}{l^2} \quad (1.29)$$

$$\varphi = 1 + \frac{2mn}{m^2+n^2} \cdot \frac{1}{1-\beta} \cdot \frac{\operatorname{ch}2m\beta + \cos2n\beta}{n\operatorname{sh}2m\beta - m\sin2n\beta} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{1}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{1}{(m^2+n^2)^2} \times \\ & \times \frac{m(3n^2 - m^2)\sin2n\beta + n(3m^2 - n^2)\operatorname{sh}2m\beta}{n\operatorname{sh}2m\beta - m\sin2n\beta} (1-\beta) + \quad (1.31) \\ & + \left[\frac{12}{5}(1+\nu) + \frac{3\nu(1+\nu)}{10} \right] \cdot \frac{1}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{l}\right)^2 (1-\beta) - \frac{4}{3}(1-\beta)^2 - \\ & - \frac{\nu}{4(1-\nu)} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{\cos2n\beta + \operatorname{ch}2m\beta}{n\operatorname{sh}2m\beta - m\sin2n\beta} \cdot \frac{2mn}{m^2+n^2} \cdot \frac{1}{1-\beta} \end{aligned}$$

2. Рассмотрим ту же самую задачу, что и в пункте 1, но теперь предположим, что штамп плоский (рис. 2).

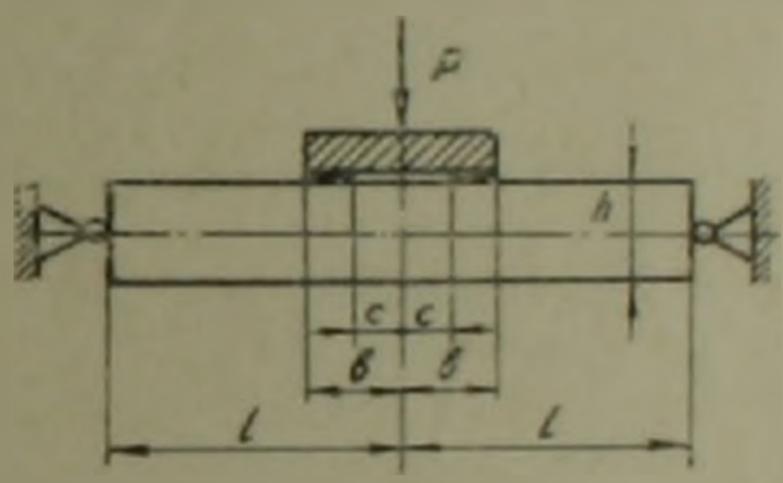


Рис. 2

Решение этой задачи в рамках теории Кирхгофа дает нулевую реакцию в зоне контакта, а на концах его появляются сосредоточенная сила и момент, соответственно $P/2$ и $Pl/2$. Решение этой задачи по теории Рейсснера с учетом только поперечных сдвигов получено в (1) и кроме распределенного давления в зоне контакта на концах его появляются сосредоточенные силы.

Так как пластинка тонкая, то естественно, задачу о плоском штампе поставить иначе, а именно: при нагружении средняя часть пластинки отходит от штампа, контактная зона начинается с конца штампа, до некоторой точки под штампом, положение которой следует определять в ходе решения задачи.

Следует сказать, что такая постановка задачи по теории Кирхгофа невозможна и это есть еще одна особенность этой теории.

Решением такой задачи по теориям, описанным в п. 1, для контактного давления получается то же самое уравнение (1.11). Решение уравнения (1.11) теперь следует взять в виде:

$$q(\xi) = C_1 \operatorname{ch}m\xi \cos n\xi + C_2 \operatorname{ch}m\xi \sin n\xi + C_3 \operatorname{sh}m\xi \cos n\xi + C_4 \operatorname{sh}m\xi \sin n\xi. \quad (2.1)$$

Вне зоны контакта на поверхности пластинки существуют две области, где следует положить $q = 0$ (ввиду симметрии задачи, рассматривается половина пластинки: $0 \leq x \leq l$). Решение систем уравнений (1.13) — (1.18) при $q = 0$ имеет вид (1.25) — (1.27). Решение систем уравнений теории пластинок в зоне $0 \leq x \leq c$ будет содержать четыре неизвестных, столько же неизвестных коэффициентов содержится в решении для зоны $b \leq x \leq l$. Четыре неизвестных величины входят в состав контактного давления (2.1), неизвестны так-

же величина b ($b = \frac{c}{l}$ — безразмерная величина, которая фиксирует

положение зоны контакта) и жесткое перемещение штампа d . Для определения этих четырнадцати величин следует принимать во внимание четыре условия стыковки в точке $x = c$, столько же условий стыковки при $x = b$, три граничных условия на конце пластинки, условие обращения в нуль контактного давления при $x = c$ и условия симметрии в точке $x = 0$: $z = 0, \theta_x = 0$. Следует сказать, что при этих условиях автоматически выполняется условие равновесия штампа.

Следует сказать, что для определения величины зоны контакта (величина b) получается трансцендентное уравнение, где не входит сила P , а входят физические величины материала пластинки и геометрические размеры пластинки и штампа.

Для определения остальных неизвестных величин получается простая алгебраическая система линейных уравнений, но так как конечные формулы очень громоздки, они здесь не приводятся.

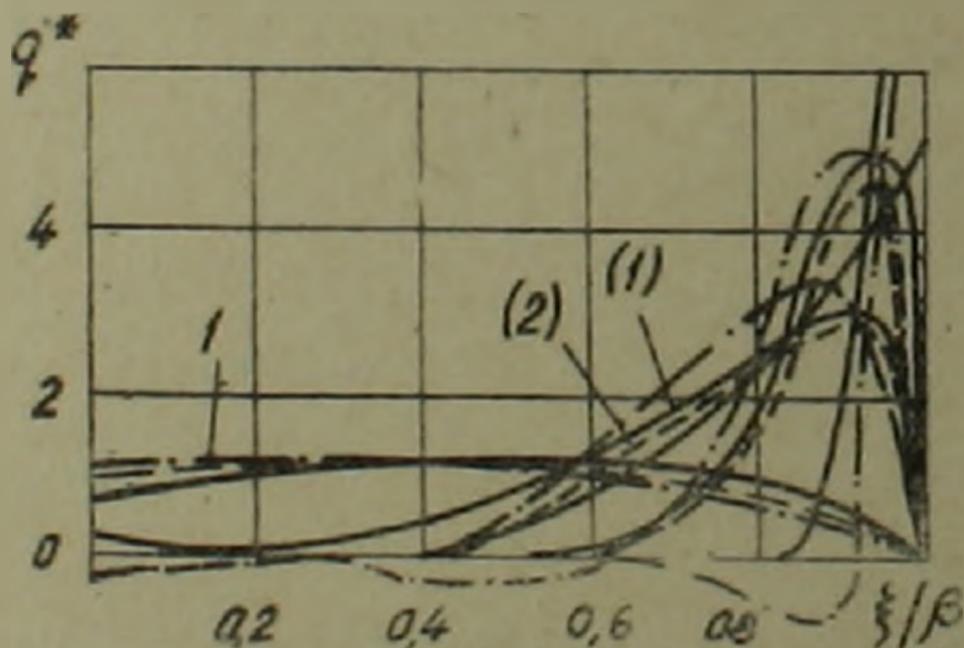


Рис. 3

3. Приводим некоторые результаты, полученные из численных расчетов, относящихся к пункту 1. На рис. 3 показан характер изменения безразмерной реакции $q^* = \frac{2q/3}{P}$ по длине зоны контакта

при следующих значениях параметров $2l/h$ и β : 1) $2l/h = 20$, $\beta = 0,1$
 2) $2l/h = 20$, $\beta = 0,3$. 3) $2l/h = 100$, $\beta = 0,1$. Сплошные линии соответ-
 ствуют решению теории упругости, пунктирные — решению п. 1, а
 штрихи — пунктирные — решению п. 2 работы (4). Монотонно возрас-
 тающая линия получена по теории пластин только с учетом попереч-
 ных сдвигов, она соответствует $2l/h = 20$, $\beta = 0,3$.

Следует сказать, что результаты расчетов по новой итерацион-
 ной теории и по теории Рейсснера — Нагди почти совпадают и на
 рис. 3 кривые для q^* по этим двум теориям почти не различаются.

Как видим учет поперечного сдвига с поперечным обжатием
 пластинки количественно улучшает результат в том смысле, что
 контактное давление еще более точно совпадает с результатами
 теории упругости, а качественно остается тем же, что и в (4).

Ленинканский филиал Ереванского
 политехнического института им. К. Маркса

ՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Կոշտ դրոշմով սալի գլանական ծոման մասին

Դիտարկվում է կոնտակտային խնդիրը եզրերում հողակապով հենված
 սալի համար, երբ նրա վերին մակերևույթի կենտրոնում ինչ որ ուժով սեղ-
 մում է դրոշմ: Խնդիրը լուծվում է ճշգրտված տեսությամբ, հաշվի առնելով
 ընդլայնական սահքերը, ընդլայնական նորմալ լարումները և ընդլայնական
 սեղմումը: Ծույց է տրված, որ խնդրի լուծումը այսպիսի դրվածքով ազատ է
 այն բոլոր հակասություններից, որոնք առաջանում են Կիրխոֆ-Լյավի տե-
 սության շրջանակներում կամ ճշգրտված տեսություններով, և որ հաշվի
 է առնվում միայն ընդլայնական սահքերը:

Դիտարկվում է կոնկրետ թվային օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԻՆՈՒՄՆԵՐՅՈՒՆ

- ¹ Ю. П. Артюхин, С. Н. Карасев, В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. II, изд. Казанского университета, 1975. ² С. П. Тимошенко, Прикладная теория упругости, Гостехиздат., Л., 1930. ³ М. М. Филоненко-Бородич, Изгиб тонкого стержня по заданной кривой, Тр. Моск. эл.-механ. ин-та инж. ж/д транспорт, вып. 58, 1949. ⁴ Н. Я. Штаерман, Контактная задача теории упругости, Гостехиздат., М., 1949. ⁵ Э. И. Григолюк, В М. Толкачев, ПММ, т. 39, вып. 5 (1975). ⁶ Н. М. Keer, M. A. G. Silva Internat. J. Mech. Scien. Vol. 12, pp. 751 — 761 (1970). ⁷ Г. Я. Попов, Труды X Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин, Кутаиси, 1975, изд. «Мецниереба», Тбилиси, т. 1, 1975 г. ⁸ С. А. Амбарцумян, Общая теория анизотропных оболочек, изд. «Наука», М., 1974. ⁹ P. M. Naghdi, Quart. of Appl. Math., Vol. 14, № 4 (1957). ¹⁰ E. Reissner, J. Math. and Phys. Vol. 23, № 1 (1944). ¹¹ Ю. П. Артюхин, С. Н. Карасев, В сб. Исследования по теории пластин и оболочек, изд. Казанского университета, вып. 9, 1972.