

УДК 532.135

МЕХАНИКА

Г. Б. Вермишян, Б. А. Мелтонян

Распределение температуры в полуплоскости из вязко-упругого материала при вибрации жесткого штампа на границе

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 29/VI 1976)

Рассматривается определение температуры в полуплоскости из вязко-упругого материала, когда на часть границы действует распределенная нагрузка, меняющаяся по гармоническому закону, амплитуда интенсивности которой постоянна. Кроме того, рассмотрен случай, когда на часть границы приложен жесткий штамп, на который действует вибрационная нагрузка с постоянной амплитудой, а остальная часть свободна от внешних нагрузок. Температура на границе полуплоскости, для случая распределенной нагрузки, принимается неизменной и равной температуре окружающей среды, а при действии жесткого штампа, участок границы полуплоскости, где приложен штамп, считается теплоизолированным, а вне штампа имеет место свободная теплоотдача в окружающую среду.

1. Пусть на границе полуплоскости  $y=0$ ,  $x \geq 0$  из вязко-упругого материала действует распределенная нагрузка, меняющаяся по гармоническому закону, амплитуда интенсивности которой равна  $P_0$ . Задача решена при условии, что температура на границе полуплоскости равна температуре окружающей среды.

Будем полагать, что составляющая комплексной податливости  $J'(T, \omega)$  мала по сравнению с  $J''(T, \omega)$ .

Таким образом, для определения напряженного состояния можно воспользоваться решением упругой задачи (1).

В этом случае компоненты напряжения будут:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 \cos \omega t, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 \cos \omega t, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 \cos \omega t, \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_y^0$  и  $\tau_{xy}^0$  — компоненты напряжения упругой задачи (1).

Используя формулы связывающей компоненты деформации и напряжение, вводя комплексную податливость (2) и учитывая (1.1), получаем выражение для компонентов деформации.

Работа, совершаемая при вязко-упругой деформации, равна:

$$W = \tau J''(T, \omega) [(\varepsilon_x^0)^2 - 2\nu \varepsilon_x^0 \varepsilon_y^0 + (\varepsilon_y^0)^2 + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^0)^2]. \quad (1.2)$$

Интенсивность выделения тепла, за один цикл при деформации вязко-упругого тела, будет:

$$q = \frac{\omega k}{2\pi} W, \quad (1.3)$$

Здесь  $k$  — величина, обратная механическому эквиваленту тепла,  $\nu$  — коэффициент, равный доле механической работы, переходящей в тепло. С целью установления максимального нагрева будем полагать этот коэффициент постоянным и равным единице.

Для стационарного случая уравнение теплопроводности принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + f(x, y) F(T, \omega) = \alpha(T - T_0), \quad (1.4)$$

где

$$f(x, y) = \mu \left[ 2(1-\nu) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)^2 + \frac{2(1-\nu)}{\pi^2} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right],$$

$$\mu = \frac{\omega k \rho_0^2}{2a_1 c_1} \quad (1.5)$$

$a_1$  — коэффициент температуропроводности,  $\alpha$  — коэффициент теплопередачи,  $c_1$  — теплоемкость.

Граничные условия для температуры  $T(x, y)$  таковы:

$$T = T_0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (1.6)$$

т. е. температура на границе полуплоскости равна температуре окружающей среды.

Кроме того, предполагается, что температура на бесконечности ограничена.

Принимая допущения, принятые в работе (1), и вводя новую неизвестную функцию

$$(T - T_0)/T_0 = u \quad (1.7)$$

уравнение (1.6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \delta^2 u = -\frac{C}{A^2} u f(x, y) - \frac{(B + CT_0)}{A^2 T_0} f(x, y), \quad \delta = \sqrt{\alpha} \quad (1.8)$$

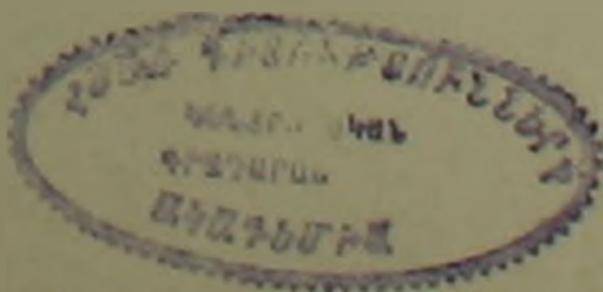
где  $A$ ,  $B$  и  $C$  физические постоянные,  $f(x, y)$  дается по формуле (1.7).

Граничное условие (1.6) преобразуется к виду:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (1.9)$$

$u(x, y)$  — ограничена при  $(x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ .

Решения уравнения (1.8) при граничном условии (1.9) можно свести к решению интегрального уравнения Фредголма второго рода, которое после перехода в полярную систему координат имеет вид:



$$u(\rho_0, \vartheta_0) = \Phi(\rho_0, \vartheta_0) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} K^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) u(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta, \quad (1.10)$$

где

$$K^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \frac{C}{A^2} f(\rho, \vartheta) G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta), \quad (1.11)$$

$$\Phi(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{(B + CT_0)}{A^2 T_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} f(\rho, \vartheta) G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta. \quad (1.12)$$

$G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)$  функция Грина уравнения (1.8) для полуплоскости, которая удовлетворяет условию излучения на бесконечности (4).

Используя теорему сложения для цилиндрических функций (5),  $G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)$  — можно представить в виде

$$G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} W'_n(\rho_0, \rho) \cdot \sin \left[ n \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right) \right] \cdot \sin \left[ n \left( \vartheta - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} W_n(\rho_0, \rho) &= I_n(i\rho) K_n(i\rho_0), \quad \rho < \rho_0 \\ &= I_n(i\rho_0) K_n(i\rho), \quad \rho > \rho_0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

где  $I_n(z)$  — функция Бесселя мнимого аргумента, а  $K_n(z)$  — функция Макдональда.

Для решения интегрального уравнения (1.10), заменим его ядро выраженным. Разложим ядро в двойной ряд Фурье по ортонормированным системам функций.

$$\left\{ \varphi_k(\rho_0, \vartheta_0) = \sqrt{\frac{4k}{\pi}} e^{-k\rho_0} \sin k \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right), \quad \varphi_m(\rho, \vartheta) = \sqrt{\frac{4m}{\pi}} e^{-m\rho} \sin m \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta \right) \right\} \quad (1.15)$$

Решение интегрального уравнения (1.12) имеет следующую форму (2):

$$u(\rho_0, \vartheta_0) = \Phi(\rho_0, \vartheta_0) + \frac{2}{V\pi} \sum_{k=1}^N \sqrt{k} Y_k e^{-k\rho_0} \sin k \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right), \quad (1.16)$$

$$Y_k = \sum_{m=1}^N X_m A_{km}^*, \quad (1.17)$$

где

$$A_{km}^* = \frac{32\pi C(1-\nu)(mk)^{3/2}}{\pi^2 A^2 (m^2 - k^2)^2} \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} W_m(\rho_0, \rho) e^{-k\rho} \rho d\rho \right| e^{-m\rho_0} \rho_0 d\rho_0 \quad m \neq k \quad (1.18)$$

$$= \frac{4k\rho C(1-\nu)}{\pi A^2} \left( \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2\pi k^2} \right) \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} W_k(\rho_0, \rho) e^{-k\rho} \rho d\rho \right| e^{-k\rho_0} \rho_0 d\rho_0, \quad m = k$$

$$\Phi(\varrho_0, \vartheta_0) = \frac{2\mu(B+CT_0)}{\pi A^2 T_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left| n \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right) \right| \int_0^{\infty} W_n(\varrho_0, \varrho) \varrho d\varrho, \quad (1.19)$$

$$b_{2p} = \frac{\nu-1}{2p}, \quad b_{2p-1} = \frac{\nu-1}{2p-1} + \frac{2}{\pi^2(2p-1)} \left[ \frac{(1-\nu)}{(2p-1)^2} - \frac{(1-\nu)(2p-1)^2-2}{(2p-1)^2-4} \right]$$

Постоянные  $X_m$  определяются из линейных систем алгебраических уравнений

$$X_m - \sum_{k=1}^N A_{mk}^* X_k = \Phi_m \quad (m=1, 2, \dots, N), \quad (1.21)$$

где

$$\Phi_m = \frac{4b_m \sqrt{m} \mu C}{\sqrt{\pi} A^2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} W_m(\varrho_0, \varrho) \varrho d\varrho \right\} e^{-m\varrho_0} \varrho_0 d\varrho_0. \quad (1.22)$$

Учитывая (1.7) из (1.16) получаем решение задачи.

2. Рассмотрим случай, когда нагружен участок  $-a \leq x \leq a$ , границы полуплоскости  $y=0$ .

Компоненты напряжения даются формулами (1.1)

где

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= -\frac{P_0}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \frac{2ay(y^2-x^2+a^2)}{(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2} \right], \\ \sigma_y^0 &= -\frac{P_0}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} - \frac{2ay(y^2-x^2+a^2)}{(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2} \right], \\ \tau_{xy}^0 &= -\frac{P_0}{\pi} \frac{4axy^2}{(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнение теплопроводности имеет вид (1.6), лишь с той разницей, что в этом случае функция  $f(x, y)$  дается в виде:

$$f(x, y) = \frac{2\mu}{\pi^2} \left[ (1-\nu) \left( \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} \right)^2 + \frac{4(1+\nu)a^2y^2}{(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2} \right]. \quad (2.2)$$

Решение рассмотренного случая ищется методом, излагаемым в 1.

3. Рассмотрим деформацию полуплоскости из вязко-упругого материала, когда на границе приложен жесткий штамп, на который действует вибрационная нагрузка с постоянной амплитудой, равной  $P_0$ . Основание штампа имеет вид дуги окружности радиуса  $R$ , симметрично расположенной относительно оси  $oy$ . Будем считать  $R$  весьма большим, тогда дугу окружности можно заменить дугой параболы  $f_0(x) = x^2/2R$ , имеющей ту же кривизну в вершине.

Для того чтобы вдавить штамп до полного соприкосновения с

отрезками границы полуплоскости шириной равной  $2a$  (отрезок границы  $-a \leq x \leq a$ ) необходимо, чтобы амплитуда  $P_0$  и полуширина отрезка  $a$  были связаны соотношением (6)

$$a = \sqrt{\frac{4RP_0(1-\nu^2)}{\pi E}}. \quad (3.1)$$

Остальная часть границы свободна от внешних нагрузок.

Произведем оценку температуры для этого случая, несколько изменив условия теплоотдачи, имея в виду, что полуплоскость более интенсивно нагревается под штампом. При приведенных ниже предположениях мы получим верхнюю оценку для этой температуры.

Будем полагать, что под штампом имеется теплоизоляция, а на остальной части границы происходит свободная теплоотдача по направлению нормали к полуплоскости.

Предполагается, что интенсивность выделения тепла не зависит от текущих координат и равна своему максимальному значению, которое принимает в начале координат.

При изложенных допущениях можно полагать, что температура зависит только от  $r$  т. е. от расстояния переменной точки до начала координат.

При таких предположениях, для стационарного случая уравнение теплопроводности принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1}{dr} + 2HJ'(T_1, \omega) = 0, \quad 0 \leq r < a \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_2}{dr} - \alpha(T_2 - T_0) + 2HJ'(T_1, \omega) = 0, \quad a < r < \infty \quad (3.3)$$

$$H = \frac{g_0 \omega k P_0}{8\pi^2 a_1 c_1 R (1 - \nu^2)}. \quad (3.4)$$

Так как температура под штампом сильно отличается от температуры вне штампа, то для этого в уравнении (3.2) для компонент комплексного модуля воспользуемся экспоненциальной аппроксимацией

$$E'(T_1, \omega) = A_0 e^{-B_0 T_1}, \quad E''(T_1, \omega) = C_0 e^{-D_0 T_1}. \quad (3.5)$$

В уравнении (3.3) воспользуемся линейной аппроксимацией вида

$$E'(T_2, \omega) = A^*, \quad E''(T_2, \omega) = C^* + D^* T_2, \quad (3.6)$$

$$A^* = A_0 e^{-B_0 T_*}, \quad C^* = C_0 e^{D_0 T_*} (1 - D_0 T_*), \quad D^* = C_0 D_0 e^{D_0 T_*}, \quad (3.7)$$

где  $T_*$  — температура при  $r = a$

Согласно формулам (3.5)–(3.7) уравнения (3.2) и (3.3) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1}{dr} + \frac{2HC_0}{A_0^2} e^{T_1} = 0, \quad 0 \leq r < a \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_2}{dr} - \gamma(T_2 - T_0) + \frac{2HC_0}{A_0^2} e^{T_2} (1 - D_0 T_2 - D_0 T_2) = 0$$

$$a < r < \infty \quad (3.9)$$

Граничные условия для температуры  $T_1$  и  $T_2$  таковы:

$$T_1 = T_2 = T_0, \quad dT_1/dr = dT_2/dr, \quad \text{при } r = a \quad (3.10)$$

$$T_1/r \rightarrow 0 < \infty, \quad T_2/r \rightarrow \infty < \infty.$$

В работе (1) рассматриваются критические условия теплового взрыва при сложном теплообмене с окружающей средой.

Для стационарного случая уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{m}{r} \frac{dT}{dr} + \gamma e^T = 0. \quad (3.11)$$

Заметим, что при  $m=0$  общий интеграл этого уравнения приведен Д. А. Франк-Каменецким (2), а для  $m=1$  общий интеграл найден Н. Лемке (3).

Уравнение (3.11) может не иметь решения. Это обстоятельство означает, что стационарный режим невозможен. Может быть также одно или несколько решений.

В рассматриваемых случаях при  $m=1$  оказывается, что полученное уравнение имеет два решения. Одно из них соответствует высокой температуре, при которой невозможно реализовать устойчиво установившийся режим. Решения уравнений (3.8) и (3.9) при граничных условиях (3.10) соответственно имеют вид:

$$T_1 = -\frac{2}{\gamma} \ln \left[ \frac{a_0}{2} \left( \frac{r^2}{a^2} e^x + e^{-x} \right) \right], \quad 0 \leq r < a \quad (3.12)$$

$$T_2 = T_0 + \frac{2}{\gamma} (1 + \operatorname{th} x) \frac{K_0(\varepsilon r) - K_0(\varepsilon a)}{\varepsilon a K_1(\varepsilon a)}, \quad a < r < \infty \quad (3.13)$$

$$T_0 = -\frac{2}{\gamma} \ln (a_0 \operatorname{ch} x), \quad a_0 = a \sqrt{\gamma HC_0} / A_0, \quad \gamma = 2B_0 - D_0 \quad (3.14)$$

$$\varepsilon = \sqrt{x} / \sqrt{1+y},$$

где  $x$  и  $y$  определяются из систем трансцендентных уравнений

$$\frac{2K_0(\varepsilon a)}{\varepsilon a K_1(\varepsilon a)} (1 + \operatorname{th} x) + \frac{\gamma y}{D_0} = (1+y) \ln \frac{y}{\delta_0 (1+y)}, \quad (3.15)$$

$$\operatorname{ch} x = a \sqrt{2D_0(1+y)} / \sqrt{\gamma y}, \quad \delta_0 = 2HC_0 D_0 e^{T_0} / 2A_0^2$$

Проведены вычисления для случая вибрации жесткого штампа. Материал является полиэтиленом.

При вычислении использованы следующие данные (2)

$A_0 = 3,4 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$ ,  $B_0 = D_0 = 0,01 \text{ град}^{-1}$ ,  $C_0 = 3,87 \cdot 10^{-2} \text{ кг/см}^2$   
 $a_1 c_1 = 0,28 \text{ ккал/мчис град}$ ,  $k = 0,00234 \text{ ккал/кгм}$ ,  $\omega = 100 \text{ гц}$ ,  $\nu = 1/3$ ,  
 $T_0 = 20^\circ$ ,  $\alpha = 0,71 \text{ см}^{-2}$ ,  $R = 400, 1000 \text{ см}$ .  $P_0 = 25, 50, 100 \text{ кг}$ .

На основании полученных результатов построены графики.

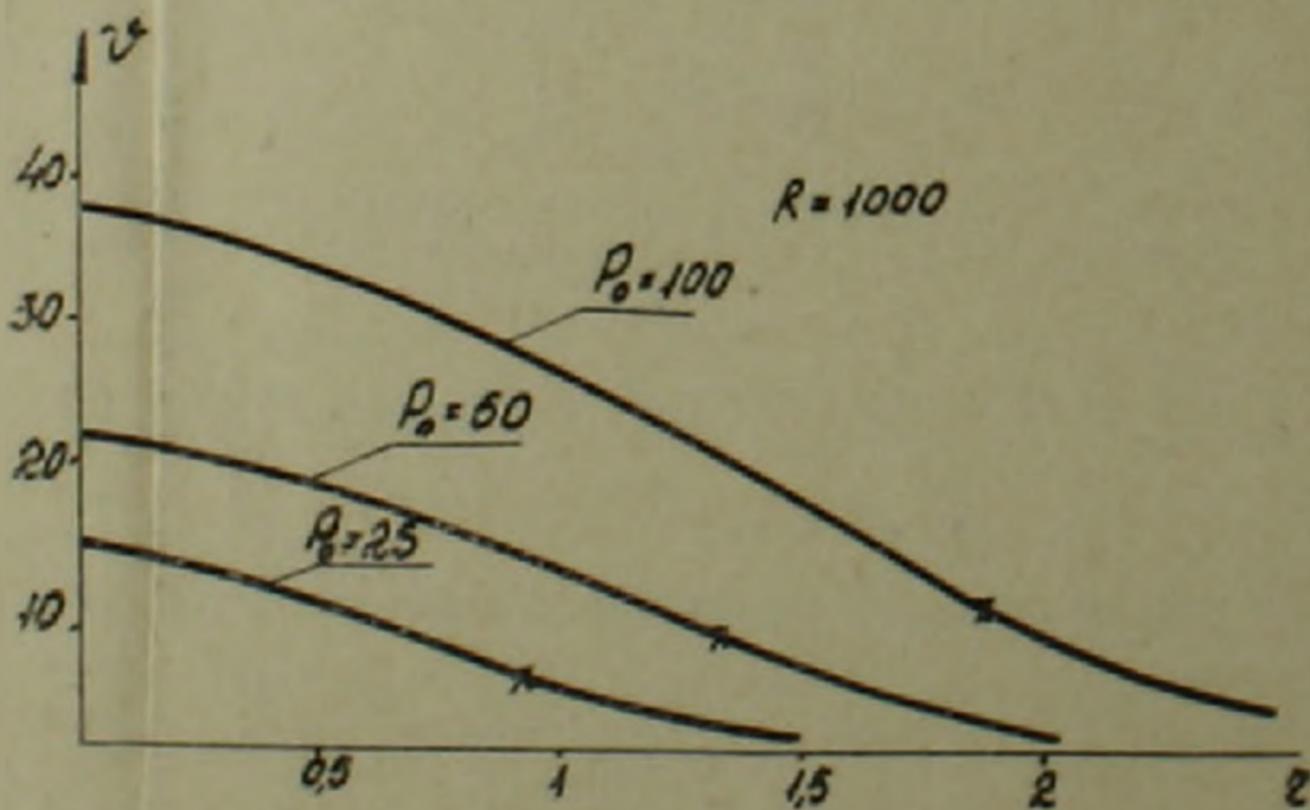
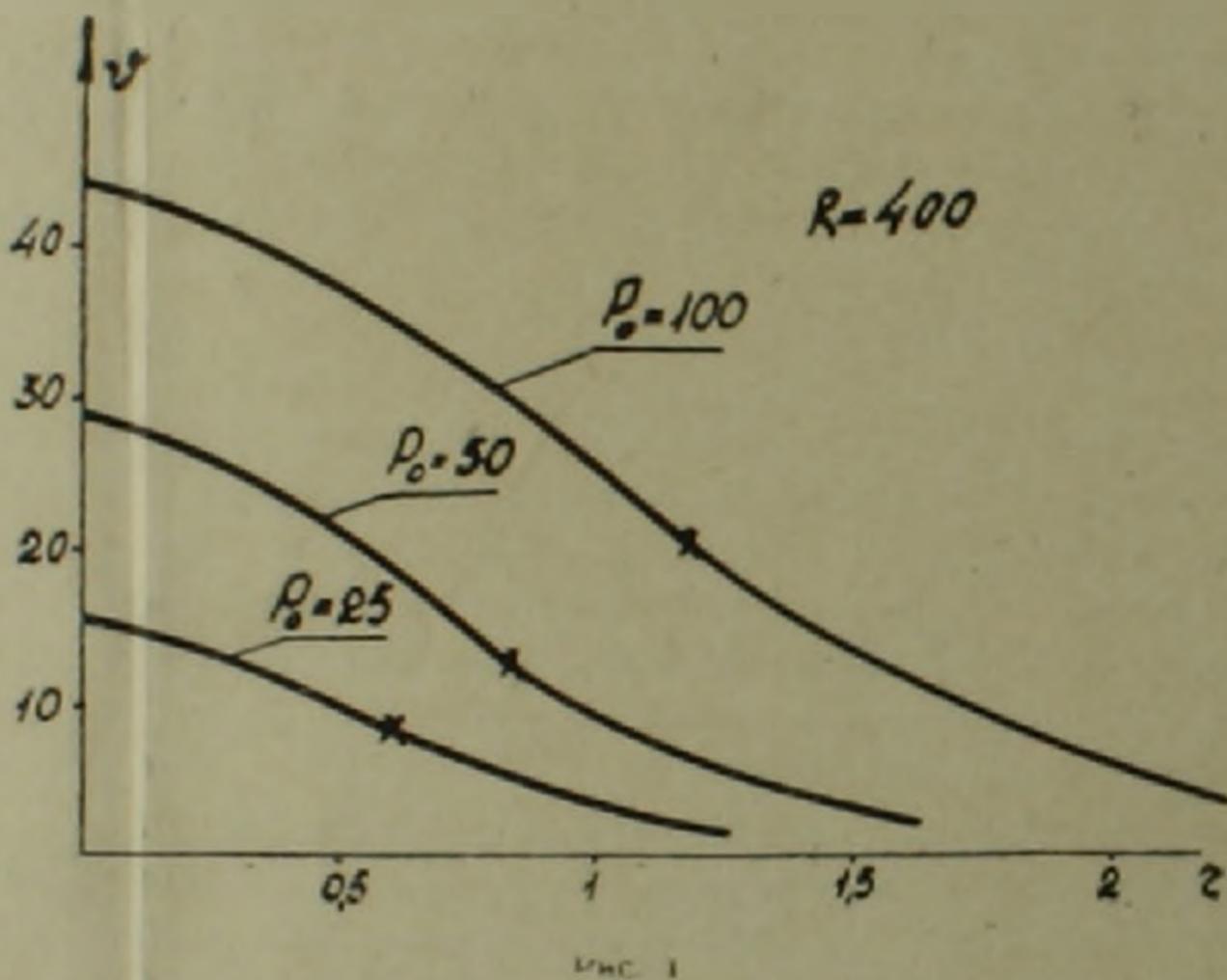


Рис. 2

На рис. 1, 2 показаны графики изменения перепад температуры  $\theta = T - T_0$  в зависимости от  $r$  при различных значениях  $R$  и  $P_0$ .

В таблице приведены значения температуры в начале координат  $-T_1(0)$  температуры  $T_0$  при  $r=a$  и половины области контакта  $-a$  в зависимости от  $R$  и  $P_0$ .

$R$	$P_0$	$a$	$T_1(0)$	$T_0$
400	25	0.5705	36.312	29.121
	50	0.8216	49.066	32.071
	100	1.1619	64.332	41.574
1000	25	0.9186	34.232	25.315
	50	1.3010	42.573	28.133
	100	1.8360	57.411	31.427

Ереванский политехнический институт

Գ. Բ. ՎԵՐՄԻՇՅԱՆ, Բ. Ա. ՄԵԼՏՈՆՅԱՆ

Եզրին տատանվող կոշտ դրոշմով մածուցիկ-առածգական կիսահարթության մեջ ջերմաստիճանի բաշխումը

Նզրին ազդող հաստատուն ամպլիտուդայով, հարմոնիկ օրենքով փոփոխվող թեղի և եզրին տատանվող կոշտ դրոշմի դեպքում, որոշվում է մածուցիկ-առածգական կիսահարթության ներսում ջերմաստիճանի բաշխումը:

Առաջին դեպքում կիսահարթության եզրը ունի հաստատուն ջերմաստիճան, իսկ երկրորդ դեպքում ընդունվում է դրոշմի տակ կիսահարթության եզրը ջերմամեկուսացված և դրոշմից դուրս եզրը ունի ազատ ջերմափոխանակում շրջապատող միջավայրի հետ:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Н. Снеддон, Преобразования Фурье, Изд. И. Л. М., 1955. <sup>2</sup> Г. Б. Вермишян, «Известия АН Арм. ССР. Механика», № 5, 1975. <sup>3</sup> Л. А. Галин, «Известия АН СССР. Механика», № 6, 1965. <sup>4</sup> Г. Н. Положий, Уравнения математической физики, Изд. «Высшая школа», М., 1964. <sup>5</sup> Г. Бейтмен, А. Эрдей, Высшие трансцендентные функции. Функция Бесселя, функции параболического цилиндра, Ортогональные многочлены, Изд. «Наука», М., 1966. <sup>6</sup> Н. И. Мухомелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. «Наука», М., 1966. <sup>7</sup> В. В. Бердыкин, А. Г. Мерджанов, ДАН СССР, т. 120, № 6 (1958). <sup>8</sup> Д. А. Франк-Каменцкий, Диффузия и теплопередача в химической кинетике, Изд. АН СССР, 1947. <sup>9</sup> H. Lemke, Jou. f. Math., 142, 118 (1913).