ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIV 1977 4

УДК 536.24

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

# Об одной задаче распространения тепла в полом шаре, заполненном хорошо перемешиваемой жидкостью

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 26/I 1977)

Среди различных случаев теплообмена между телом и окружающей средой, имеющих место в практике, значительный интерес представляют случаи, когда коэффициент теплообмена изменяется во времени. Приближенным решениям задач теплопроводности в различных областях при изменяющихся во времени коэффициентах теплообмена посвящены работы [1-7]. В работах [8-9] дано точное решение задачи распространения тепла в сплошном и полом цилиндрах, в [10] рассмотрена задача теплопроводности в бесконечной пластине.

В настоящей статье дается решение задачи радиального периодического распространения тепла в полом шаре, заполненном хорошо перемешиваемой жидкостью, на внешней поверхности которого происходит теплообмен с окружающей средой, когда коэффициент теплообмена и температура окружающей среды периодически изменяются во времени. Задачи подобного рода могут возникать, например, при периодическом изменении скорости потока, окружающего тело, изменяющихся химических реакциях на поверхности [11,12], при полете тел в различных слоях атмосферы с переменной плотностью и т. п.

Предполагаем, что внутри сферической оболочки ($R_1<r<R_2$) и в жидкости ($0<r<R_1$) действуют периодически изменяющиеся во времени источники тепла. Функция $U(r, t)$ распределения температуры в сферической области ($R_1<r<R_2$) удовлетворяет уравнению [13]

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{a}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{c\rho}w(r, t), \tag{1}$$

граничному условию на поверхности $r=R_2$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R_2}=h(t)[S(t)-U(R_2, t)] \tag{2}$$

и условию на поверхности контакта с хорошо перемешиваемой жидкостью [14] (в предположении, что температура жидкости равна температуре поверхности контакта)

$$-4\lambda\pi R_1^2 \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R_1} - M_1C_1\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{r=R_1} - Q_1(t)=0. \qquad (3)$$

Здесь $a=\frac{\lambda}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности тела, $\lambda$ — коэффициент теплопроводности, $\rho$ — плотность, $c$ — коэффициент теплоемкости, $w(r, t)$ — интенсивность тепловыделения в сферической оболочке, $h(t)$ — коэффициент теплообмена, $S(t)$ — температура окружающей среды, $M_1$, $c_1$, $Q_1(t)$ — соответственно масса жидкости, ее удельная теплоемкость и количество выделяемого в жидкость тепла.

Относительно функций $h(t)$, $S(t)$ и $Q_1(t)$ предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию в интервале $(0, \theta)$, а $w(r, t)$ — в области $(R_1<r<R_2,\ 0<t<\theta)$, где $\theta$ — период изменения функции $U(r, t)$, и что $h(t)$ — неотрицательна.

Применяя к функции $U(r, t)$ конечное комплексное преобразование Фурье по времени $t$, для изображения функции $U(r, t)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$F_k''(r)+\frac{2}{r}F_k'(r)-\frac{i\gamma_k}{a}F_k(r)=-\frac{1}{\lambda}w_k(r), \qquad (4)$$

где

$$F_k(r)=\int_0^{\theta}U(r, t)e^{i\gamma_k t}dt;\quad w_k(r)=\int_0^{\theta}w(r, t)e^{i\gamma_k t}dt;\quad \gamma_k=\frac{2k\pi}{\theta}.$$

Решая уравнение (4) и удовлетворяя условию (3), будем иметь

$$F_k(r)=\frac{1}{r\varphi_k(R_2)}\Bigg\{\varphi_k(r)\left[N_k+\frac{1}{\lambda\mu_k}\int_r^{R_2}r_1w_k(r_1)\,\mathrm{sh}\,\mu_k(R_2-r_1)dr_1\right]+$$

$$+\,\mathrm{sh}\,\mu_k(R_2-r)\left[\frac{1}{\lambda\mu_k}\int_{R_1}^{r}r_1w_k(r_1)\varphi_k(r_1)dr_1-R_1\int_0^{\theta}Q_1(t)e^{i\gamma_k t}dt\right]\Bigg\}; \qquad (5)$$

$$F_0(r)=\frac{1}{\lambda R_2}\Bigg[\lambda N_0+\int_r^{R_2}w_0(r_1)r_1(R_2-r_1)dr_1+\left(\frac{R_2}{r}-1\right)\Bigg(\int_{R_1}^{r}w_0(r_1)r_1^2dr_1+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\theta}Q_1(t)dt\Bigg)\Bigg].$$

Здесь

$$\mu_k=\sqrt{-\frac{i\gamma_k}{a}};\quad \varphi_k(r)=(i\gamma_kM_1c_1-4\lambda\pi R_1)\,\mathrm{sh}\,\mu_k(r-R_1)-4\lambda\pi R_1^2\mu_k\,\mathrm{ch}\,\mu_k(r-R_1). \qquad (6)$$

Согласно формуле обращения ([15]), переход от изображения к оригиналу осуществляется рядом

$$U(r,t)=\frac{1}{\theta}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k(r)e^{-i\gamma_k t}. \tag{7}$$

Применяя далее к условию (2) конечное комплексное преобразование Фурье, получаем, пользуясь формулой обращения (7), следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$N_k=\frac{1}{\Phi_k}\Big[-\zeta_k(R_2)\sum_{j=-\infty}^{\infty}C_{k-j}N_j+\Psi_k\Big];\quad N_0=\frac{1}{h^*}\Big(-\sum_{j=-\infty}^{\infty}C_{-j}N_j+\Psi_0\Big).$$

Здесь обозначено (8)

$$\Phi_k=\mu_k[i\gamma_kM_1c_1-4\lambda\pi R_1(1+\nu R_1)]\operatorname{ch}\mu_k(R_2-R_1)+\Big[\nu(i\gamma_kM_1c_1-4\lambda\pi R_1)+$$

$$+\frac{4i\gamma_k}{a}\lambda\pi R_1^2\Big]\operatorname{sh}\mu_k(R_2-R_1);\quad C_k=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}[h(t)-h^*]e^{i\gamma_k t}dt;\quad h^*=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}h(t)dt; \tag{9}$$

$$\Psi_k=\frac{1}{\lambda}\int_{R_1}^{R_2}rw_k(r)\zeta_k(r)dr+\int_0^{\theta}[R_2\zeta_k(R_2)h(t)S(t)-\mu_kR_1Q_1(t)]e^{i\gamma_k t}dt;$$

$$\Psi_0=\frac{1}{\lambda R_2}\int_0^{\theta}\Big[\int_{R_1}^{R_2}w(r,t)r^2dr+\lambda R_2^2h(t)S(t)+\frac{Q_1(t)}{4\pi}\Big]dt;\quad \nu=h^*-\frac{1}{R_2}.$$

Преобразуем полученную систему (9), отделив действительную и мнимую составляющие. Представляя

$$N_k=(n_k+im_k)k^{-5/4}\quad (k\geqslant 1);\quad N_0=n_0, \tag{10}$$

для определения новых неизвестных $n_k$ и $m_k$ приходим к следующим соотношениям:

$$n_k=-\frac{k^{5/4}}{G_k}\Big\{A_k(R_2)\Big[d_kn_0+\sum_{j=1}^{\infty}j^{-5/4}((d_{k-j}+d_{k+j})n_j-(b_{k-j}-b_{k+j})m_j)\Big]-$$

$$-B_k(R_2)\Big[b_kn_0+\sum_{j=1}^{\infty}j^{-5/4}((b_{k-j}+b_{k+j})n_j+(d_{k-j}-d_{k+j})m_j)\Big]\Big\}+q_k; \tag{11}$$

$$m_k=-\frac{k^{5/4}}{G_k}\Big\{A_k(R_2)\Big[b_kn_0+\sum_{j=1}^{\infty}j^{-5/4}((b_{k-j}+b_{k+j})n_j+(d_{k-j}-d_{k+j})m_j)\Big]+$$

$$+B_k(R_2)\Big[d_kn_0+\sum_{j=1}^{\infty}j^{-5/4}((d_{k-j}+d_{k+j})n_j-(b_{k-j}-b_{k+j})m_j)\Big]\Big\}+p_k;$$

$$(k\geqslant 1)$$

$$n_0=\frac{1}{h^*}\Big[-2\sum_{j=1}^{\infty}j^{-5/4}(d_jn_j+b_jm_j)+\Psi_0\Big].$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$G_k=\frac{\gamma_k}{a}[\gamma_k^2M_1^2c_1^2+16\lambda^2\pi^2R_1^2(1+\nu R_1)^2]\gamma_k^{(0)}(R_2)+\Big[\gamma_k^2\Big(\nu M_1c_1+\frac{4\lambda}{a}\pi R_1^2\Big)^2+$$

$$+16\lambda^2\pi^2 R_1^2\nu^2\Big[\tau_k^{(1)}(R_2)+2\delta_k\Big[\nu(\gamma_k^2M_1^2c_1^2+16\lambda^2\pi^2R_1^2(1+\nu R_1))+$$

$$+\frac{4\lambda}{a}\pi R_1^2\gamma_k^2M_1c_1\Big[\chi_k^{(0)}(2R_1-R_2)+8\lambda\pi R_1^2\gamma_k\delta_k\Big[M_1c_1\nu^2+\frac{4\lambda}{a}\pi R_1(1+$$

$$+\nu R_1)\chi_k^{(1)}(2R_1-R_2)\Big]\Big];\quad b_k=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta[h(t)-h^*]\sin\gamma_k t\,dt;$$

$$d_k=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta[h(t)-h^*]\cos\gamma_k t\,dt;$$

$$A_k(r)=(\gamma_k^2M_1^2c_1^2-16\lambda^2\pi^2R_1^2)[\delta_k(\tau_k^{(1)}(r)-\psi_k^{(1)}(r))+\nu\tau_k^{(1)}(r)]+$$

$$+4\lambda\pi R_1^2\gamma_k M_1c_1\Big[\frac{\gamma_k}{a}(\tau_k^{(1)}(r)-\xi_k^{(0)}(r))-2\delta_k\nu\chi_k^{(1)}(2R_1-r)\Big]+16\lambda^2\pi^2R_1^2\Big[(\tau_k^{(0)}(r)-$$

$$-\psi_k^{(0)}(r))\frac{\gamma_k\delta_k R_1}{a}+(1+\nu R_1)\frac{\gamma_k}{a}\tau_k^{(0)}(r)-\frac{\gamma_k}{a}\xi_k^{(1)}(r)+2\nu\delta_k\chi_k^{(0)}(2R_1-r)\Big];$$

$$B_k(r)=(\gamma_k^2M_1^2c_1^2+16\lambda^2\pi^2R_1^2)[\delta_k(\tau_k^{(1)}(r)+\psi_k^{(1)}(r))+\nu\xi_k^{(1)}(r)]+$$

$$+4\lambda\pi R_1^2\gamma_k M_1c_1\Big[\frac{\gamma_k}{a}(\tau_k^{(0)}(r)+\xi_k^{(1)}(r))+2\delta_k\nu\chi_k^{(0)}(r)\Big]+16\lambda^2\pi^2R_1^2\Big[(\tau_k^{(0)}(r)+$$

$$+\psi_k^{(0)}(r))\frac{\gamma_k\delta_k R_1}{a}+\frac{\gamma_k}{a}(1+\nu R_1)\xi_k^{(0)}(r)+\frac{\gamma_k}{a}\tau_k^{(1)}(r)+2\delta_k\nu\chi_k^{(1)}(r)\Big];$$

$$\delta_k=\sqrt{\frac{\gamma_k}{2a}};\qquad(12)$$

$$q_k=\frac{k^{3/4}}{G_k}\int_0^\theta\Big\{R_2h(t)S(t)[A_k(R_2)\cos\gamma_k t-B_k(R_2)\sin\gamma_k t]-\delta_kR_1Q_1(t)(b_k\cos\gamma_k t+$$

$$+D_k\sin\gamma_k t)+\frac{1}{\lambda}\int_{R_1}^{R_2}rw(r,t)[A_k(r)\cos\gamma_k t-B_k(r)\sin\gamma_k t]dr\Big\}\,dt;$$

$$p_k=\frac{k^{3/4}}{G_k}\int_0^\theta\Big\{R_2h(t)S(t)[B_k(R_2)\cos\gamma_k t+A_k(R_2)\sin\gamma_k t]+\delta_kR_1Q_1(t)(D_k\cos\gamma_k t-$$

$$-E_k\sin\gamma_k t)+\frac{1}{\lambda}\int_{R_1}^{R_2}rw(r,t)[A_k(r)\sin\gamma_k t+B_k(r)\cos\gamma_k t]dr\Big\}\,dt;$$

$$D_k = 2\gamma_k M_1 c_1 [\delta_k \eta_k^{(0)}(R_1) + \nu\chi_k^{(0)}(R_1)] + 8\nu\pi R_1^2 \left| \frac{\gamma_k}{a} \chi_k^{(0)}(R_1) + \delta_k \nu\xi_k^{(0)}(R_2) \right| +$$

$$+ 8\nu\pi R_1 [\delta_k \xi_k^{(0)}(R_1) + \nu\chi_k^{(1)}(R_1)];$$

$$E_k = 2\gamma_k M_1 c_1 [\delta_k \xi_k^{(0)}(R_1) + \nu\chi_k^{(1)}(R_1)] - 8\nu\pi R_1^2 \left| \frac{\gamma_k}{a} \chi_k^{(1)}(R_1) - \delta_k \nu\eta_k^{(0)}(R_1) \right| -$$

$$- 8\nu\pi R_1 [\delta_k \eta_k^{(0)}(R_1) + \nu\chi_k^{(0)}(R_1)];$$

$$\eta_k^{(l)}(r) = \operatorname{ch}\delta_k(r + R_2 - 2R_1)\cos\delta_k(R_2 - r) + (-1)^l \operatorname{ch}\delta_k(R_2 - r)\cos\delta_k(r + R_2 - 2R_1);$$

$$\xi_k^{(l)}(r) = \operatorname{sh}\delta_k(r + R_2 - 2R_1)\sin\delta_k(R_2 - r) + (-1)^l \operatorname{sh}\delta_k(R_2 - r)\sin\delta_k(r + R_2 - 2R_1);$$

$$\psi_k^{(l)}(r) = \operatorname{ch}\delta_k(r + R_2 - 2R_1)\sin\delta_k(R_2 - r) + (-1)^l \operatorname{ch}\delta_k(R_2 - r)\sin\delta_k(r + R_2 - 2R_1);$$

$$\zeta_k^{(l)}(r) = \operatorname{sh}\delta_k(r + R_2 - 2R_1)\cos\delta_k(R_2 - r) + (-1)^l \operatorname{sh}\delta_k(R_2 - r)\cos\delta_k(r + R_2 - 2R_1);$$

$$\chi_k^{(l)}(r) = \operatorname{ch}\delta_k(r + R_2 - 2R_1)\sin\delta_k(R_2 - r) + (-1)^l \operatorname{sh}\delta_k(R_2 - r)\cos\delta_k(r + R_2 - 2R_1).$$

Таким образом, для определения $n_k$ и $m_k$ получили бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (11). Для исследования этих систем оценим вначале сумму модулей коэффициентов при неизвестных в каждом из уравнений (11). Учитывая предположенную выше ограниченность вариации коэффициента теплообмена $h(t)$ в интервале $(0, \theta)$ и пользуясь оценкой коэффициентов Фурье функций с ограниченной вариацией ([16]), для суммы модулей коэффициентов $k$-го уравнения первой из систем (11) после упрощений будем иметь

$$\sigma_k < \frac{4H[|A_k(R_2)| + |B_k(R_2)|]}{\pi G_k} \left( 5k^{1/4} + \ln \frac{k}{25} \right) \tag{13}$$

и начиная от $k > \dfrac{\pi a\theta}{8(R_2 - R_1)^2}$,

$$\sigma_k < \frac{8H\pi^{-1}}{\sqrt{\delta_k^2 + \nu^2}} \left( 5k^{1/4} + \ln \frac{k}{25} \right) < \frac{48\sqrt{2a}H}{\pi\sqrt{\gamma_k + 2a\nu^2}} k^{1/4} < \frac{48\sqrt{a\theta}H}{\pi\sqrt{\pi}} k^{-1/4}. \tag{14}$$

Здесь через $H$ обозначена полная вариация $h(t)$ в $(0, \theta)$. Аналогичную оценку получаем и для второй из систем (11). Из (14) усматриваем, что $\sigma_k$ с возрастанием $k$ стремится к нулю с быстротой $O(k^{-1/4})$ и, начиная от $k > \Omega^4$, где $\Omega = \dfrac{48\sqrt{a\theta}H}{\pi\sqrt{\pi}}$, становится меньше 1. Далее, принимая во внимание ограниченность вариации функций $S(t)$, $w(r, t)$ и $Q_1(t)$, из (12) получаем, что свободные члены $q_k$ и $p_k$ систем (11), будучи ограниченными в своей совокупности, также стремятся к нулю с быстротой $O(k^{-1/4})$. Из теории бесконечных систем ([15]) следует ограниченность решения систем (11) и сходимость процесса последовательных приближений.

В заключение заметим, что при конкретном задании коэффициента теплообмена $h(t)$, а также функций $S(t)$, $w(r, t)$ и $Q_1(t)$, преобразованием неизвестных $n_k$ и $m_k$ можно значительно усилить быстроту коэффициентов, определяемых из бесконечных систем ([18]), что позволяет существенно уменьшить число операций, необходимых для получения заданной точности решения.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

## Դյուրին խառնվող հեղուկով լցված սնամեջ գնդում ջերմության տարածման մի խնդրի մասին

*Հոդվածում դիտարկվում է դյուրին խառնվող հեղուկով լցված սնամեջ գնդում ջերմության շառավղային պարբերական տարածման խնդիրը՝ գնդի արտաքին մակերևույթին շրջապատող միջավայրի հետ ջերմափոխանակության առկայության դեպքում, երբ ջերմափոխանակության գործակիցը և շրջապատող միջավայրի ջերմությունը պարբերաբար փոփոխվում են ըստ ժամանակի։ Ենթադրվում է, որ սնամեջ գնդում և հեղուկում գործում են պարբերաբար փոփոխվող ջերմության աղբյուրներ։*

*Խնդրի լուծումը տրվում է արագ զուգամիտող շարքով՝ ըստ եռանկյունաչափական և ցուցչային ֆունկցիաների, որի գործակիցները որոշվում են գծային հանրահաշվական անվերջ սիստեմներից։ Ապացուցվում է այդ սիստեմների լուծման սահմանափակությունը և հաջորդական մոտավորությունների զուգամիտությունը։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Н. Гордов*, ПММ, т. 19, № 2 (1955). [2] *К. А. Киселев, А. Н. Лазарев*. Ж. техн. физ., т. 30, № 6 (1960). [3] *М. А. Качанов, Ю. Л. Розеншток*. ПМТФ, № 3, 1962. [4] *И. М. Приходько*, ИВУЗ, «Авиационная техника», № 3, 1963. [5] *В. В. Иванов, В. В. Соломатов*, ИФЖ, т. 9, № 1, 1965. [6] *М. М. Сидляр*. Прикл. мех., т. 1, № 7 (1965). [7] *Ю. В. Видин*, ИФЖ, т. 11, № 2 (1966). [8] *Р. С. Минасян*, ДАН Арм. ССР, т. 48, № 1 (1969). [9] *Р. С. Минасян*, ИФЖ, т. 17, № 5 (1969). [10] *В. Н. Козлов*, ИФЖ, т. 20, № 5 (1971). [11] *Д. Б. Сполдинг*, сб. Современные проблемы теплообмена, изд. «Энергия», 1966. [12] *Б. С. Петухов, В. Н. Майданик, Г. А. Новиков*, ТВТ, т. 9, № 2 (1971). [13] *А. В. Лыков*, Теория теплопроводности, изд. Высш. шк., 1967. [14] *Г. Карслоу, Д. Егер*. Теплопроводность твердых тел, изд. «Наука», 1964. [15] *К. Дж. Трантер*. Интегральные преобразования в математической физике, Гостехиздат, 1956. [16] *А. Зигмунд*, Тригонометрические ряды, т. 1, изд. «Мир», 1965. [17] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962. [18] *Р. С. Минасян*, сб. «Тепло— и массоперенос», т. 8, изд. «Наука и техника», Минск, 1968.