ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIV 1977 4

УДК 51.01 : 518.5

МАТЕМАТИКА

А. А. Чубарян

О сложности выводов в формальной арифметике и исчислении предикатов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 28/III 1977)

В работе сравниваются по сложности выводов формальные теории, одна из которых получается добавлением к другой любой формуле, недоказуемой и неопровержимой в ней. Аналогичные вопросы рассматривались ранее ([1-4]).

Мы установим, что в широком классе случаев функция, характеризующая соотношение сложности вывода формул в двух системах указанного типа, мажорирует почти все значения любой обще-рекурсивной функции (о. р. ф.). В частности, тем же свойством обладают функции, характеризующие сравнительную сложность вывода предикатных формул в классическом и интуиционистском, а также в интуиционистском и минимальном исчислении предикатов.

Будем предполагать, что каждая из рассматриваемых нами теорий определяется заданием (1) алфавита, включающего символы (,), $\vee$, $\supset$, $\neg$; (2) некоторого множества слов в данном алфавите, именуемых формулами (причем, предполагается, что если δ и ε суть формулы, то $(\delta \vee \varepsilon)$, $(\delta \supset \varepsilon)$, $\neg(\delta)$ также формулы); (3) некоторого множества упорядоченных систем формул (элементы этого множества именуются выводами). Будем говорить, что вывод $W=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ есть вывод формулы β в теории Φ (обозначение: $W \underset{\Phi}{-} \beta$), если формула α_n совпадает с формулой β. Будем говорить, что формула β выводима в теории Φ (обозначение: $\vdash_\Phi \beta$), если существует вывод W такой, что $W \underset{\Phi}{\rightarrow} \beta$. Будем предполагать, что в любой из рассматриваемых нами теории Φ для любых формул δ и ε выполнены условия:

i) $\vdash_\Phi \delta \supset \delta \vee \varepsilon$;

ii) $\vdash_\Phi (\delta \vee \varepsilon) \supset (\neg \varepsilon \supset \delta)$;

iii) если $\vdash_\Phi \delta$ и $\vdash_\Phi \delta \supset \varepsilon$, то $\vdash_\Phi \varepsilon$.

Будем говорить, что теория Ψ есть расширение теории Φ. (обозначение: $\Psi \supseteq \Phi$), если всякая формула и всякий вывод теории Φ являются соответственно формулой и выводом теории Ψ.

Будем предполагать фиксированными некоторые взаимно-однозначные нумерации всевозможных формул и всевозможных выводов всех рассматриваемых теорий; в записях иногда будем отождествлять формулу или вывод с соответствующим номером.

Через $C^b(\mathfrak{W})$ будем обозначать сложность вывода $\mathfrak{W}$, определяемую посредством обще-рекурсивной функции C^b, удовлетворяющей условию; для всякого n уравнение $C^b(\mathfrak{W})=n$ имеет лишь конечное число решений, и существует алгорифм, который по n выдает список всех решений $\mathfrak{W}$ этого уравнения (ср. ([4])).

Для каждой формулы $\mathfrak{A}$, выводимой в фиксированной теории Φ определим ее сложность $C_\Phi(\mathfrak{A})$ по выводимости в теории Φ следующим образом:

$$C_\Phi(\mathfrak{A}) = \min_{\substack{\mathfrak{W} \to \mathfrak{A} \\ \Phi}} C^b(\mathfrak{W}).$$

Пусть Φ и Ψ некоторые теории, причем $\Psi \supseteq \Phi$. Для сравнения сложностей выводов одних и тех же формул $\mathfrak{A}$ в теориях Φ и Ψ определим функцию Шеннона:

$$Ш^{\Psi\Phi}(n) = \max_{\substack{C_\Psi(\mathfrak{A}) \leq n, \\ \vdash_\Phi \mathfrak{A}}} C_\Phi(\mathfrak{A}).$$

1. Формальную теорию Φ назовем m-универсальной, если множества выводимых и опровержимых формул этой теории, т. е.

$$M^\Phi = \{\mathfrak{A} / \vdash_\Phi \mathfrak{A}\} \quad \text{и} \quad M^\Phi_- = \{\mathfrak{A} / \vdash_\Phi \neg \mathfrak{A}\}$$

рекурсивно перечислимы и образуют эффективно неотделимую пару (ср. русск. перевод ([5]), стр. 277).

Теорема 1. *Пусть Φ_1 — m — универсальная теория и α-любая формула, такая, что $\alpha \notin M^{\Phi_1}$ и $\alpha \notin M^{\Phi_1}_-$; пусть далее Φ_2 — такое расширение Φ_1 что $\vdash_{\Phi_2} \alpha$.*

Тогда для любой о. р. ф. φ

$$\forall^\infty_n (Ш^{\Phi_2 \Phi_1}(n) > \varphi(n))^*.$$

Обозначим через S_K, S_J и S_M соответственно классическую, интуиционистскую и минимальную арифметические системы (см. напр. ([5]), гл. IV). Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Для произвольной о. р. ф. φ*

$$\forall^\infty_n (Ш^{S_K S_J}(n) > \varphi(n)).$$

$$\forall^\infty_n (Ш^{S_K S_M}(n) > \varphi(n)),$$

$$\forall^\infty_n (Ш^{S_J S_M}(n) > \varphi(n)).$$

---

* Через $\forall^\infty_n p(n)$ будем, как обычно, обозначать утверждение $\exists m \forall n ((n > m) \supset p(n))$.

2. Аналогичные результаты имеют место и для соответствующих систем исчисления предикатов, а именно, пусть через $P_К$, $P_У$ и $P_М$ обозначены соответственно классическая, интуиционистская и минимальная системы чистого исчисления предикатов (в каждой из них предполагается наличие предикатов, соответствующих функциям $'$, $+$, $\cdot$).

Теорема 3. *Для произвольной о. р. ф.* φ

$$\forall^{\infty}_{n}(Ш^{P_К P_У}(n) > \varphi(n)),$$

$$\forall^{\infty}_{n}(Ш^{P_К P_М}(n) > \varphi(n)),$$

$$\forall^{\infty}_{n}(Ш^{P_У P_М}(n) > \varphi(n)).$$

3. Теперь рассмотрим абсолютные функции Шеннона: характеризующие для каждой из рассматриваемых теорий сложность выводов формул фиксированной „длины".

Обозначим через $l(\beta)$ сложность формулы β, определяемую посредством общерекурсивной функции l, удовлетворяющей условию: для каждого n уравнение $l(\beta)=n$ имеет лишь конечное число решений и существует алгорифм, выдающий для каждого n список всех его решений (ср. ([4])).

Для произвольной теории Ф определим абсолютную функцию Шеннона:

$$Ш^{Ф}(n) = \max_{\substack{l(\beta)\leq n,\\ \vdash_{Ф}\beta}} C_{Ф}(\beta).$$

Теорема 4. *Пусть Ф—произвольная m—универсальная теория, тогда для всякой о. р. ф.* φ

$$\forall^{\infty}_{n}(Ш^{Ф}(n) > \varphi(n)).$$

Аналогичный результат имеет место и для систем исчисления предикатов.

Теорема 5. *Для произвольной о. р. ф.* φ

$$\forall^{\infty}_{n}(Ш^{\Delta}(n) > \varphi(n)),$$

где под Δ *понимаем* $P_К$ $P_У$ *или* $P_М$.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Н. В. Петри за ряд указаний и замечаний.

Ереванский государственный университет

Ա. Ա. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ

Ֆորմալ թվաբանության և պրեդիկատների հաշվի արտածումների բարդության մասին

Հոդվածում համեմատվում են ըստ արտածումների բարդության այնպիսի ֆորմալ տեսություններ, որոնցից մեկը ստացվում է մյուսին ավելացնելով որպես աքսիոմ մի բանաձև, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին. ոչ այդ բանաձևը, ոչ նրա բացասումը չեն արտածվում այդ երկրորդ տեսության մեջ։ Միևնույն բանաձևերի արտածման բարդությունները այդ տեսություններում համեմատելու համար սահմանվում են Շենոնի ֆունկցիաներ։ Ապացուցվում է, որ վերը նշված տիպի տեսությունների բավականաչափ լայն դասի համար Շենոնի համեմատական ֆունկցիաները գերազանցում են կամայական ընդհանուր ռեկուրսիվ ֆունկցիայի համարյա բոլոր արժեքները։ Նման հատկությամբ օժտված են նաև Շենոնի այն ֆունկցիաները, որոնք ներմուծվում են ֆիքսած «երկարության» բանաձևերի արտածման բարդությունները մի շարք դիտարկված տեսություններում գնահատելու համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Эренфойхт, Я. Мыцельский*, Сб. Сложность вычислений и алгорифмов, 172—173, Изд. «Мир», М., 1974. [2] *М. И. Канович*, Сб. Сложность вычислений и алгорифмов, 186—189, Изд. «Мир», М., 1974. [3] *А. А. Чубарян*, «Известия АН Арм. ССР», Математика т. 9, вып. № 5 (1974). [4] *М. Блюм*, Сб. Проблемы математической логики, 401—522, Изд. «Мир», М., 1970. [5] *С. К. Клини*, Введение в метаматематику, И.Л., М., 1957.