

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян, Р. Г. Аванесян

О передаче нагрузки от бесконечного стрингера к двум зашемленным упругим полосам

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 19/X 1976)

Рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от бесконечного в обоих направлениях стрингера к двум зашемленным по одному краю одинаковым полосам. Эта задача представляет собой аналог известной задачи Мелана (¹), где вместо полос имеются полуплоскости.

На основе предположений Мелана, сводящихся к тому, что стрингер в горизонтальном направлении находится в одноосном напряженном состоянии, а в вертикальном — он абсолютно жесткий, т. е. его толщина в процессе деформации не изменяется.

При указанных предположениях решение этой задачи сводится, относительно нормальных и тангенциальных контактных напряжений, к системе интегро-дифференциальных уравнений. Решение последней строится при помощи преобразования Фурье. В конечном итоге контактные напряжения представляются в виде интегралов Фурье.

1°. Пусть две бесконечные полосы, изготовленные из одинакового материала с модулем упругости E_2 , коэффициентом Пуассона ν_2 и толщины H , зашемлены по основаниям $y = -H$ и находятся в условиях плоской деформации. Будем считать, что они соединены между собой бесконечным упругим стрингером малой толщины h с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1 .

Пусть, далее усиленные таким способом полосы нагружены горизонтальной силой $Q_0 \delta(x)$, где $\delta(x)$ — известная дельта функция Дирака (рис. 1) Требуется определить закон распределения нормальных и

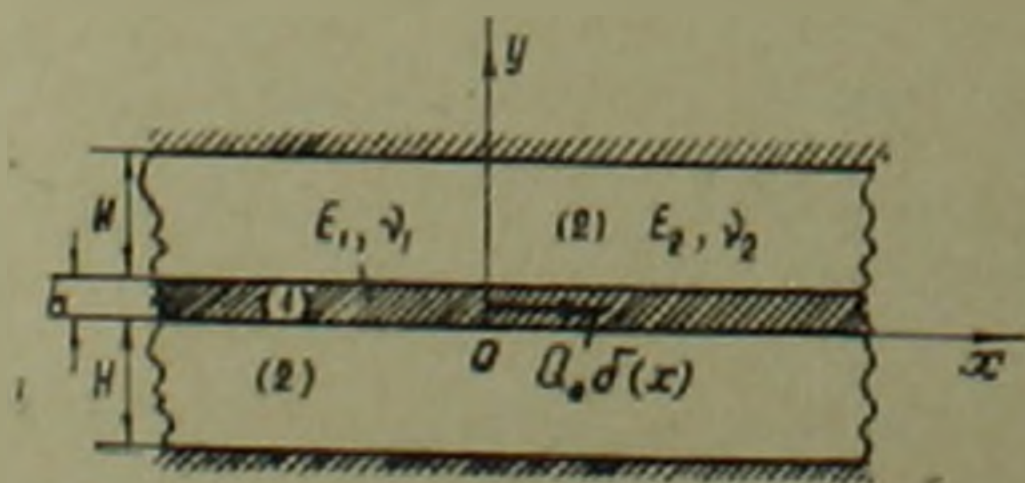


рис. 1

тангенциальных контактных напряжений вдоль линии соединения стрингера с полосами. Здесь как и в работах (1-3) относительно стрингера предполагается, что под действием приложенной силы и только тангенциальных контактных напряжений стрингер растягивается или сжимается как стержень, находясь в одноосном напряженном состоянии. Предполагается также, что вдоль горизонтальной оси вертикальные упругие перемещения постоянны. Последнее предположение обусловлено малостью толщины стрингера, так как ее изменение от точки к точке в процессе деформации незначительно и можно пренебречь.

Для вывода основной системы разрешающих функциональных уравнений обозначим интенсивности нормальных и тангенциальных контактных напряжений, действующих вдоль линии соединения стрингера с упругими полосами через $p(x)$ и $q(x)$ соответственно. Предварительно приводим выражения вертикальных $v_2(x)$ и горизонтальных $u_2(x)$ перемещений граничных точек упругих полос, которые выражаются формулами (4).

$$\begin{cases} v_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{11}(|x-\xi|)p(\xi)d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} k_{12}(x-\xi)q(\xi)d\xi \\ u_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{21}(x-\xi)p(\xi)d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} k_{22}(|x-\xi|)q(\xi)d\xi \end{cases} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.1)$$

где

$$\begin{cases} k_{1j}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_{1j}(s) [(2-j)\cos sx + (j-1)\sin sx] ds \\ k_{2j}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_{2j}(s) [(j-1)\cos sx + (2-j)\sin sx] ds \end{cases} \quad (j=1,2)$$

$$K_{jj}(s) = (2x+1)[2xHs + (-1)^j(x+1)\operatorname{sh}2Hs]/2\mu s K(s)$$

$$K_{12}(s) = K_{21}(s) = [4H^2 x^2 s^2 + (x+1)(1-\operatorname{ch}2Hs)]/2\mu s K(s)$$

$$K(s) = 2x(x+1)\operatorname{ch}2Hs + x^2(4H^2 s^2 + 1) + (x+1)^2.$$

а $x = (\lambda + \mu)/2\mu$, λ и μ постоянные Ляме материала полос.

На основе сделанных выше предположений поставленная задача математически формулируется в виде соотношений.

$$\begin{cases} \frac{dv_1(x)}{dx} = 0 \\ E_1 h \frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} = 2q(x) - Q_0 \delta(x) \end{cases} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.2)$$

где $u_1(x)$ и $v_1(x)$ — горизонтальные и вертикальные перемещения точек стрингера.

Теперь заметим, что на линии соединения стрингера с полосами должны удовлетворяться условия:

$$\frac{dv_1(x)}{dx} = \frac{dv_2(x)}{dx}, \quad \frac{du_1(x)}{dx} = \frac{du_2(x)}{dx}, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.3)$$

Учитывая (1.3), из (1.1) и (1.2) относительно неизвестных контактных напряжений $p(x)$ и $q(x)$ получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \left| \frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} k_{11}(|x-\xi|) p(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} k_{12}(x-\xi) q(\xi) d\xi \right] \right| = 0 \\ \left| E_1 h \frac{d^2}{dx^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} k_{21}(x-\xi) p(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} k_{22}(|x-\xi|) q(\xi) d\xi \right] \right| = 2q(x) - Q_0 \delta(x) \end{cases} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.4)$$

2°. Применяя к обеим частям системы (1.4) преобразование Фурье, после некоторых несложных выкладок ее решение можем представить следующими формулами:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{Q_0}{\pi} \mu \int_0^{\infty} \frac{K_{22}^*(s)}{K^*(s)} \sin s x ds, \\ q(x) &= \frac{Q_0}{\pi} \mu \int_0^{\infty} \frac{K_{11}^*(s)}{K^*(s)} \cos s x ds, \end{aligned} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11}^*(s) &= -(2\kappa+1)|2H\kappa s - (\kappa+1)\operatorname{sh} 2Hs|, \\ K_{22}^*(s) &= -\{(\kappa+1)(\operatorname{ch} 2Hs - 1) - 4H^2\kappa^2 s^2\}, \end{aligned}$$

$$K^*(s) = E_1 h s [(\kappa+1)^2 (\operatorname{ch} 2Hs - 1) - 2H^2\kappa^2 s^2] + 2\mu(2\kappa+1)[(\kappa+1)\operatorname{sh} 2Hs - 2H\kappa s].$$

В формулах (2.1) первый интеграл, выражающий закон распределения нормальных контактных напряжений, довольно быстро сходится, что же касается второго интеграла, который выражает закон распределения тангенциальных контактных напряжений, то его сходимость можно ускорить, приняв во внимание асимптотическое представление:

$$\frac{K_{11}^*(s)}{K^*(s)} = \frac{A_1}{\kappa_1 + s} + O(s^{-3}) \quad s \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

где $A_1 = (2\kappa+1)/E_1 h(\kappa+1)$ и $\kappa_1 = 2\mu A_1$.

Исходя из (2.2) можем записать:

$$\int_0^{\infty} \frac{K_{11}^*(s)}{K^*(s)} \cos sx ds = A_1 \int_0^{\infty} \frac{\cos sx}{x_1 + s} ds + \int_0^{\infty} \left[\frac{K_{11}^*(s)}{K^*(s)} - \frac{A_1}{x_1 + s} \right] \cos sx ds$$

и после некоторых элементарных операций отсюда находим

$$\int_0^{\infty} \frac{K_{11}^*(s)}{K^*(s)} \cos sx ds = A_1 \left[\cos x_1 x \operatorname{ci} x_1 x + \sin x_1 x \operatorname{si} x_1 x \right] + \\ + \int_0^{\infty} \frac{(x_1 + s) K_{11}^*(s) - A_1 K^*(s)}{(x_1 + s) K^*(s)} \cos sx ds,$$

где $\operatorname{si} x$ и $\operatorname{ci} x$ — интегральный синус и косинус функции.

Здесь уже последний интеграл довольно быстро сходится.

Итак, учитывая последнюю формулу, для выражения тангенциального контактного напряжения $q(x)$ можем записать:

$$q(x) = \frac{Q_0}{2\pi} \left\{ x_1 \left[\cos x_1 x \operatorname{ci} x_1 x + \sin x_1 x \operatorname{si} x_1 x \right] + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{2\pi(x_1 + s) K_{11}^*(s) - x_1 K^*(s)}{(x_1 + s) K^*(s)} \cos sx ds \right\}.$$

В последней формуле первым членом с точностью постоянных дается известное решение Мелана (¹), а второй член в виде косинус-интеграла Фурье довольно быстро сходится.

Ереванский государственный университет

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ռ. Դ. ԱՎԱՆԵՍՅԱՆ

Անվերջ վերադրից առաձգական երկու ամրակցված շերտերին
բեռի փոխանցման խնդրի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է անվերջ վերադրից առաձգական երկու անվերջ նույնանման, մեկական եզրով ամրակցված շերտերին բեռի փոխանցման հարթ կոնտակտային խնդիրը:

Խնդրի լուծումը բերվում է անհայտ կոնտակտային լարումների նկատմամբ ինտեգրալ-դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Վեր-

«իւս լուծվում է Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ: Հետագոտված են կոնտակտային լարումների վարքը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ E. Melan, Ein Beitrag zur Theorie geschwister verbindungen. Ingr - Arch. Bd. 3. Nr. 2. s 123 - 129. (1932). ² H. Busler Scheibe mit endlicher, elastischer Verstellung. VBI — Forschungsheft 485 Beilage zu Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Ausgabe B, Bd. 27, s. 5 - 44, 1961. ³ Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян, Механика деформируемых тел и конструкции. Сб. статей. М., „Машиностроение“, 1975. ⁴ И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко, Неклассические смешанные задачи теории упругости, Изд. „Наука“, М., 1974.

