ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIV 1977 3

УДК 517.948.35 513.88 517.925

МАТЕМАТИКА

Т. Н. Арутюнян

О спектре операторов типа Дирака

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 17/II 1977)

В работе излагаются результаты, относящиеся к дискретности спектра, асимптотике числа собственных значений и полноте собственных и присоединенных функций самосопряженных и несамосопряженных операторов, порожденных системой дифференциальных уравнений первого порядка, называемыми системами типа Дирака [1].

Рассмотрим конечное множество γ_N квадратных числовых матриц a_l порядка N, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $a_l a_j = -a_j a_l,\ l \neq j$

б) $a_l^2 = E$

в) $a_l^* = a_l$

В работе (1) доказано, что множество γ_N состоит из $S(N) = 2g+1$ матриц, где $N = 2^g r$, $r = 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, т. е. r — нечетное число. (Очевидно, что любое натуральное N можно представить таким образом).

Введем обозначения, которыми мы будем пользоваться. Норму Гильберта-Шмидта матрицы $A = (a_{ij})$ будем обозначать так:

$$\| A \| = (\sum |a_{ij}|^2)^{1/2}.$$

Под $L^2_N(R_m)$ будем понимать гильбертово пространство N-компонентных вектор-функций $u(x) = \{u_k(x)\}_{k=1}^N$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in R_m$ со следующим скалярным произведением:

$$[a, b] = \int_{R_m} (a, b)\, dx = \int_{R_m} \sum_{k=1}^{N} a_k(x) \overline{b_k(x)}\, dx.$$

Рассмотрим в пространстве $L^2_N(R_m)$ операторы $(m = 1, 2, 3)$

$$L_m = \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=m+1}^{S(N)} a_j\, p_j(x) = L_{m,1} + P_m(x).$$

Обозначим $a_m^2(x) = \sum_{j=m+1}^{S(N)} p_j^2(x)$.

Теорема 1. *Если потенциал* $p_m(x)$ *удовлетворяет условиям*

1) $\| |P(\xi) - P(x)| P^{-a}(\xi) \| \leqslant A|x-\xi|$ при $|x-\xi| \leqslant 1$ $A>0$, $0<a<2$

2) $\| P(x) \|^2 < B \| P(\xi) \|^2$ при $|x-\xi| \leqslant 1$, $B>0$

3) $\| P(x) \| \leqslant K e^{c_0 a(\xi)|x-\xi|}$ при $|x-\xi|>1$, $K>0$, $0<c_0<1$

4) $\| P(x) \| \geqslant C(1+|x|^\beta)$ при больших $|x|$, $\beta>0$,

то операторы L_m *существенно самосопряжены в* $L_N^2(R_m)$ *и спектр их чисто дискретен.*

Обозначим через $N^+(\lambda, L_m)$ число собственных значений оператора L_m, лежащих в интервале $(0, \lambda)$, $\lambda>0$, т. е. функцию

$$N^+(\lambda, L_m) = \sum_{0<\lambda_k<\lambda} 1.$$

Аналогично через $N^-(\lambda, L_m)$ обозначим число собственных значений, лежащих в интервале $(\lambda, 0)$, $\lambda<0$, т. е.

$$N^-(\lambda, L_m) = \sum_{\lambda<\lambda_k<0} 1,$$

где через $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ мы обозначили систему собственных значений оператора L_m, причем положительными индексами нумеруем положительные собственные значения, а отрицательными индексами — отрицательные.

Теорема 2. *Если потенциал* $P_m(x)$ *кроме условий* 1) — 4) *теоремы* 1 *удовлетворяет условию*

5) $c_1(1+|x|^\beta) \leqslant \| P(x) \| \leqslant c_2(1+|x|^\beta)$, $0<c_1<c_2$, $\beta>0$,

то имеют место следующие двусторонние асимптотические формулы (соответственно при $\lambda \to -\infty$ *и* $\lambda \to +\infty$*).*

$$N^-(\lambda, L_1),\ N^+(\lambda, L_1) \sim \frac{N}{2\pi} \int\limits_{a_1^2(x)<\lambda^2} |\lambda^2 - a_1^2(x)|^{\frac{1}{2}}\, dx,$$

$$N^-(\lambda, L_2),\ N^+(\lambda, L_2) \sim \frac{N}{16\pi} \iint\limits_{a_2^2(x)<\lambda^2} |\lambda^2 - a_2^2(x)|\, dx_1\, dx_2,$$

$$N^-(\lambda, L_3),\ N^+, L_3) \sim \frac{N}{12\pi^2} \iiint\limits_{a_3^2(x)<\lambda^2} |\lambda^2 - a_3^2(x)|^{\frac{3}{2}}\, dx_1,\ dx_2,\ dx_3.$$

Рассмотрим также, вообще говоря, несамосопряженные операторы в $L_N^2(R_m)$

$$\mathbf{L}_m = L_m + R_m(x),$$

где R_m — произвольная матрица — функция порядка N, удовлетворяющая только условию „подчиненного роста“

$$\| R_m(x) \| \leq C \, \| P_m(x) \|^{1-\varepsilon}, \ \varepsilon > 0.$$

Теорема 3. *Спектр операторов $\mathbf{L}_m$ состоит из нормальных собственных чисел и расположен, кроме, быть может, конечного числа, в параболах*

$$|\tau| < c|\xi|^{\gamma}, \ 0<\gamma<1$$

(где $\lambda = \xi + i\tau$ — собственное значение оператора $\mathbf{L}_m$).

Система собственных и присоединенных функций оператора $\mathbf{L}_m$ полна в $L^2_N(R_m)$.

Пусть $\lambda_k = \xi_k + i\tau_k$, $k = \pm 1, \ \pm 2, \ldots$ — система собственных значений оператора $\mathbf{L}_m$. Введем функции

$$N^+_R(\lambda, \mathbf{L}_m) = \sum_{0<\xi_k<\lambda} 1, \ \lambda > 0$$

$$N^-_R(\lambda, \mathbf{L}_m) = \sum_{\lambda<\xi_k<0} 1, \ \lambda < 0.$$

Теорема 4. *При указанных выше условиях на матрицы $P_m(x)$ и $R_m(x)$ имеют место следующие асимптотические равенства*

$$N^{\pm}_R(\lambda, \mathbf{L}_m) \sim N^{\pm}(\lambda, L_m)$$

соответственно при $\lambda \to +\infty$ и $\lambda \to -\infty$.

При доказательстве этих фактов автор существенно опирался на методику, разработанную А. Г. Костюченко ([2]).

В заключение автор выражает глубокую признательность А. Г Костюченко за помощь и ценные обсуждения в течение работы.

Ереванский государственный университет

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Դիրակի տիպի օպերատորների սպեկտրի մասին

Բերված է չորս թեորեմ, նվիրված Դիրակի տիպի ինքնահամալուծ և ոչ ինքնահամալուծ օպերատորներին։

Եթե $P_m(x)$ բավարարում է 1(—4) պայմաններին, ապա $L_m = \sum_1^m L_k^* \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} + P_m$ օպերատորը ինքնահամալուծ է. Նրա սպեկտրը դիսկրետ է (թեորեմ 1) և նրա սեփական արժեքների թիվը $(0, \lambda)$ ինտերվալում բավարարում է որոշ ասիմպտոտիկ հավասարությունների (թեորեմ 2)։

$\mathbf{L}_m = L_m + R_m$ ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների համար ապացուց-

ված է սեփական և կապակցված վեկտորների լրիվությունը $L^2_N(R_m)$ տարածությունում (թեորեմ 3) և բերված է սեփական արժեքների թվի ասիմպտոտիկան (թեորեմ 4)։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *B. Stockert*, Publs math., 17, №1-4, 41-55 (1970). [2] *А. Г. Костюченко*, Докторская диссертация, МГУ, 1966.