ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIV 1977 3

УДК 517.535.6

МАТЕМАТИКА

Л. Д. Григорян

К оценке нормы голоморфной составляющей мероморфной функции

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 15/II 1977)

1. Настоящая заметка примыкает к работе ([1]). Введем необходимые обозначения.

Пусть $U=\{z: |z|<1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости, Γ-его граница, n и m натуральные числа, $n\geqslant m$. Через $M_n^{(m)}(U)$ обозначим множество всех мераморфных в U функций f таких, что
а) число полюсов f в U с учетом кратностей не превосходит n;
б) число геометрически различных полюсов f в U не превосходит m;
в) $\| f \|_\Gamma = \sup\limits_{\zeta\in\Gamma} \varlimsup\limits_{z\to\zeta,\, z\in U} |f(z)| < 1$.

Пусть R_f — сумма главных частей функции $f\in M_n^{(m)}(U)$ по всем ее полюсам в U, $f^* = f - R_f$ — голоморфная составляющая функции f.

Положим

$$\Lambda_n^{(m)}(U)=\sup\{\| f^* \|_\Gamma:\ f\in M_n^{(m)}(U)\}.$$

Из теоремы 2 работы ([1]) вытекает, что для любых n, $m (n>1$, $n\leqslant m)$ справедлива оценка

$$\Lambda_n^{(m)}(U)\leqslant Cm\log n; \tag{1}$$

здесь и в дальнейшем буквой C (с теми или иными индексами) обозначаются положительные абсолютные постоянные.

Если m — фиксированное число, то $\Lambda_n^{(m)}(U)$ действительно имеет логарифмический порядок роста при $n\to\infty$ ([4]). При $m=n$ логарифмический множитель в (1) может быть опущен ([2]), где показано, что $\Lambda_n^{(n)}(U)\asymp n$; тем самым, для последовательностей $\{m_n\}$, $m_n\to\infty$, таких, m_n асимптотически близка к n (напомним, что $m_n\leqslant n$), оценка $\Lambda_n^{(m)}(U)\leqslant Cm\log n$ не является точной. Следующая теорема показывает, что для любой последовательности $\{m_n\}$, растущей не быстрее какой-либо степени n^δ, $0<\delta<1$, эта оценка дает правильный порядок роста $\Lambda_n^{(m_n)}(U)$ (для $n\to\infty$).

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{M} = \{m_n\}$ *— любая последовательность натуральных чисел* ($m_n \leq n$) *такая, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log m_n}{\log n} < 1 \tag{2}$$

Тогда для всех n

$$\Lambda_n^{(m_n)}(U) \geq C(\mathfrak{M}) m_n \log n, \tag{3}$$

где $C(\mathfrak{M}) > 0$ *зависит только от последовательности* $\mathfrak{M}$.

Тот факт, что множитель в оценке (3) должен зависеть от заданной последовательности $\mathfrak{M}$, вытекает из сказанного выше.

2. Наметим доказательство теоремы; мы опускаем вычисления, связанные с обоснованием ряда дальнейших оценок.

Для произвольной точки $a \in U$ положим

$$K_{n,a}(z) = K_n\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $K_n(z) = P_n(1/z)/P_n(z)$, а $P_n(z)$ есть n-ая частная сумма Тейлора функции $1/\sqrt{1-z}$ в окрестности нуля (функция $K_n(z)$ рассматривалась в работе [4]; подробнее см. [3]).

Пусть $\mathfrak{M} = \{m_n\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы. Рассмотрим последовательность рациональных функций следующего вида

$$\Phi_n(z) = \prod_{i=1}^{m_n} K_{p_n, a_i^{(n)}}(z), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $$p_n = \left[\frac{n}{m_n}\right], \quad a_i^{(n)} = 1 - \frac{1}{n^i}, \quad i = 1, \ldots, m_n.$$

В [4] показано, что многочлен $P_n(z)$ не имеет корней в U, следовательно функция $\Phi_n(z)$ имеет полюсы только в точках $a_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, m_n$, число которых с учетом кратностей не превосходит n. Отсюда следует, что $\Phi_n(z) \in M_n^{(m_n)}(U)$ ($|\Phi_n(z)| = 1$, $z \in \Gamma$).

Пусть $g_n = \bigcup_{i=1}^{m_n} g_n(a_i^{(n)})$, где $g_n(a) = \left\{z \in U : \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < e^{-1/n}\right\}$.

Нетрудно убедиться, что для всех n

$$g_n \subset G_n = \left\{z \in U : |z-1| \geq \frac{C}{n^{m_n+1}}\right\}.$$

Из определения множества g_n следует [3], что

$$|\Phi_n(z)| \leq e, \quad z \in \partial G_n) \tag{4}$$

По формуле Коши

$$R_{\Phi_n}(1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_n} \frac{\Phi_n(z)}{1-z}\, dz.$$

Отсюда, используя (4), получаем

$$|R_{\Phi_n}(1)| \geq \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{\Phi_n(z)}{1-z}\, dz \right| - \varepsilon, \tag{5}$$

где $\Gamma_n = \Gamma \cap \partial G_n$; заметим, что не уменьшая общности можно считать $\Gamma_n = \left\{ z = e^{i\theta} : \frac{C}{n^{m_n+1}} \leq |\theta| \leq \pi \right\}$.

Из условия (2) следует, что для $n > n(\mathfrak{M})$ можно положить $P_n = [n^\beta]$, $0 < \beta \leq 1$.

Пусть для любого $n > 1$ $i = 1, \ldots, m_n$)

$$J_{n,i} = \left\{ z = e^{i\theta} : \frac{\log n}{n^{i+\beta}} \leq \frac{|\theta|}{C} < \frac{1}{n^i \log n} \right\},$$

$$J'_{n,i} = \left\{ z = e^{i\theta} : \frac{\log n}{n^{i+1}} < \frac{|\theta|}{C} \leq \frac{1}{n^{i+\beta} \log n} \right\},$$

$$J_{n,0} = \left\{ z = e^{i\theta} : C \cdot \frac{\log n}{n} \leq |\theta| \leq \pi \right\}.$$

В([2]) показано, что при $z = e^{i\theta}$, $0 < |\theta| \leq \pi$

$$\left| \arg(1-az) + \arg\left(\frac{1}{1-z}\right) + \arg K_{n,a}(z) \right| < C \sqrt{\frac{1-a}{n \cdot |\theta|}}, \tag{6}$$

где $0 < a < 1$, а C не зависит от n и a.

Зафиксируем произвольное i_0, $1 \leq i_0 \leq n$. Используя неравенство (6), получаем:

$$\left| \arg \frac{1}{1-z} + \arg K_{p_n, a_{i_0}^{(n)}}(z) \right| \leq \frac{C_1}{\sqrt{\log n}}, \quad z \in J_{n,i_0} \tag{7}$$

(так как $|\arg(1-a_{i_0}^{(n)}(z)| < \frac{C_2}{\log n}$ при $z \in J_{n,i_0}$; напомним, что здесь и далее мы считаем $p_n = [n^\beta]$). Если $i_0 \neq 1$, то для $i < i_0$ при $z \in J_{n,i_0}$

$$\arg K_{p_n, a_i^{(n)}}(z)| = |2\arg P_{p_n, a_i^{(n)}}(z)| \leq C_3 n^\beta \frac{n^i}{n^{i_0} \log n} \leq C_4 \frac{n^{i-i_0+1}}{\log n} \tag{8}$$

(надо учесть, что в данном случае $|\arg p_n(e^{i\theta})| \leq n|\theta|$ и $\left|\arg \frac{e^{i\theta}-a}{1-ae^{i\theta}}\right| \leq C_5 \frac{|\theta|}{1-a}$).

При $i_0 \neq m_n$, применяя (6) для значений $i > i_0 (i \leq m_n)$, получаем

$$|\arg K_{p_n, a_i^{(n)}}(z)| \leq C_6 \sqrt{\frac{n^{i_0+\beta}}{n^\beta \cdot n^i \log n}} \leq C_6 \sqrt{\frac{n^{i_0-i}}{\log n}}, \quad z \in J_{n,i_0} \tag{9}$$

$$\left(\left|\arg \frac{1-a_i^{(n)}z}{1-z}\right| \leqslant C_7 \cdot n^{i-i}, \quad z \in J_{n,i_0}\right).$$

Так как

$$\arg \frac{\Phi_n(z)}{1-z} = \arg \frac{1}{1-z} + \sum_{i=1}^{m_n} \arg K_{p_n, a_i^{(n)}}(z),$$

то, объединяя оценки (7), (8) и (9), имеем:

$$\left|\arg \frac{\Phi_n(z)}{1-z}\right| < \frac{C_8}{\sqrt{\log n}}, \quad z \in J_n' = \sum_{i=1}^{m_n} J_{n,i}. \tag{10}$$

Из (10), учитывая конструкцию множества J_n' и то, что $|\Phi_n(z)| = 1$, $z \in \Gamma$, получим

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{J_n'} \frac{\Phi_n(z)}{1-z} dz\right| \geqslant \frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{C_{10}}{\log n}\right) \int\limits_{J_n'(\theta)} \frac{d\theta}{|\theta|} \geqslant C'(\mathfrak{M}) m_n \log n \tag{11}$$

$$\left(J_n'(\theta) = \sum_{i=1}^{m_n} J_{n,i}'(\theta) = \left\{\theta : \frac{\log n}{n^{i+3}} \leqslant \frac{|\theta|}{C} < \frac{1}{n^i \log n}\right\}\right).$$

Теперь заметим, что оценки типа (8) и (9) справедливы также для $z \in J_{n,i_0}'$. Однако при $i = i_0$

$$|\arg K_{p_n, a_{i_0}^{(n)}}(z)| \leqslant \frac{C_{11}}{\log n}, \quad z \in J_{n,i_0}'.$$

Из последних замечаний следует, что

$$|\arg \Phi_n(z)| < \varepsilon_n, \quad z \in J_n' = \sum_{i=1}^{m_n} J_{n,i}' \quad (\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0). \tag{12}$$

Так как множество J_n' симметрично относительно оси, то для всех n

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{J_n'} \frac{dz}{1-z}\right| \leqslant 1.$$

Отсюда, учитывая (12) и конструкцию множества J_n', имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{J_n'} \frac{\Phi_n(z)}{1-z}\right| \leqslant C_{12} \varepsilon_n m_n \log n \tag{13}$$

Отметим, что

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n/(J_n' \cup J_n')} \frac{\Phi_n(z)}{1-z} dz\right| \leqslant C m_n \log \log n. \tag{14}$$

Используя (5), (11), (13) и (14), получаем

$$|R_{\varphi_n}(1)| \geqslant C(\mathfrak{M}) m_n \log n.$$

Очевидно, что аналогичные соотношения справедливы для $\Lambda_n^{(m_n)}(U)$. Теорема доказана.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Լ. Դ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Մերոմորֆ ֆունկցիայի հոլոմորֆ բաղադրիչի նորմայի գնահատականի վերաբերյալ

Ինչպես բխում է ([1]) աշխատանքի թեորեմ 2-ից, ցանկացած n, m ($n > 1$, $m \leqslant n$) բնական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ գնահատականը.

$$\Lambda_n^{(m)}(U) \leqslant Cm \log n, \tag{1}$$

որտեղ՝ $U = \{z : |z| < 1\}$ — միավոր շրջանն է կոմպլեքս հարթության վրա, իսկ C-ն դրական բացարձակ հաստատուն է։

Ներկա հոդվածում ցույց է տրված, որ ցանկացած $\{m_n\}$ հաջորդականության համար, որը աճում է ոչ արագ քան n^θ-ի որևէ աստիճան ($0 < \theta < 1$), (1) գնահատականը տալիս է $\Lambda_n^{(m_n)}(U)$-ի աճի ճշգրիտ կարգը, երբ $n \to \infty$։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Гончар, Л. Д. Григорян*, Матем. сб., т. 99 (141), № 4 (1976). [2] *Л. Д. Григорян*, Матем. сб., т. 100 (142), № 1 (1976). [3] *Л. Д. Григорян*, «Известия АН Арм. ССР», матем., XII, № 3 (1977). [4] *E. Landau*, Darstellung and Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Functionentheorie, 1929.