

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Г. С. Кочарян

Теорема единственности для функций нескольких переменных

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/II 1977)

Проблема квазианалитичности Ж. Адамара для функций из класса $C[M_n]$, бесконечно-дифференцируемых в промежутке (a, b) и удовлетворяющих там условию

$$|\varphi^{(n)}|(x) \leq \Lambda B^n M_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где $\Lambda = \Lambda(\varphi)$ и $B = B(\varphi)$ — постоянные, заключалась в следующем:

Каковы должны быть числа последовательности $\{M_n\}_1^\infty$, чтобы для каждой функции $\varphi(x) \in C[M_n]$ из равенств

$$\varphi^{(n)}(x_0) = 0, \quad x_0 \in (a, b) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

следовало бы тождество

$$\varphi(x) = 0, \quad x \in (a, b). \quad (3)$$

Решение этой проблемы было дано в исследованиях Данжуа и Карлемана. В формулировке Островского теорема Данжуа—Карлемана гласит:

Для квазианалитичности класса $C[M_n]$, т. е. для того, чтобы из условий (2) для любой функции $\varphi(x) \in C[M_n]$ следовало бы тождество (3), необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2} dr = +\infty, \quad (4)$$

где

$$T(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^n}{M_n}.$$

В работе П. Лелонга ⁽¹⁾ проблема квазианалитичности распространяется и решается для классов функций нескольких переменных.

В работе М. М. Джрбашяна ⁽²⁾ вводится новое, более общее понятие z -квазианалитичности и дается полное решение проблемы z -квазианалитичности для классов функций, охватывающих обычные квазианалитические классы.

В статье ⁽¹⁾ результаты работы ⁽²⁾ были обобщены для определенных классов функций, аналитических в угловых областях.

В настоящей статье результаты работ ⁽¹⁾ и ⁽²⁾ распространяются на более общие классы функций нескольких переменных, при этом существенно используются методы исследования ⁽³⁾.

Введем некоторые обозначения, необходимые для дальнейшего изложения.

С произвольной системой чисел $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ($0 < z_k < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$; $n \geq 1$) ассоциируем систему $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$, где $\rho_k = (1 - z_k)^{-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Очевидно, что $\rho_k \geq 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Обозначим далее через $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, где $q_k \geq 0$, произвольную систему целых чисел; $|q|_k = q_1 + q_2 + \dots + q_k$ и $|q| = |q|_n = q_1 + q_2 + \dots + q_n$.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — точка n -мерного евклидова пространства R^n с вещественными коэффициентами, а $G \subset R^n$ — множество точек с координатами $x_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Определим на G несколько классов функций

$$f|x| = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Через C^n обозначим множество функций $f|x|$, обладающих на G частными производными всех порядков, удовлетворяющих условиям:

$$\sup \left| \frac{\partial^{|q|} f|x|}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \dots \partial x_n^{q_n}} \right| \prod_{k=1}^n (1 + x_k^{m_k}) < +\infty \quad (5)$$

при любых целых $q_k \geq 0$ и $m_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Для функции $f|x| \in C^n$ при $0 < x_k < 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$) введем в рассмотрение дробный интеграл в смысле Вейля:

$$D_{x_k}^{-\alpha} f|x| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_k}^{\infty} (t_k - x_k)^{\alpha-1} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_k$$

и дробную производную в смысле Вейля:

$$D_{x_k}^{\frac{1}{\rho_k}} f|x| = \frac{\partial}{\partial x_k} D_{x_k}^{-\alpha} f|x|,$$

Обозначим

$$D_{x_k}^{\frac{q_k}{\rho_k}} f|x| = D_{x_k}^{\frac{1}{\rho_k}} \left| D_{x_k}^{\frac{q_k-1}{\rho_k}} f|x| \right| \quad \text{при } q_k \geq 2.$$

$$D_{x_k}^{|\alpha|} f(x) = D_{x_k}^{\alpha_k} \dots D_{x_1}^{\alpha_1} f(x)$$

и

$$D^1 f(x) = D^{\alpha} f(x) = D_{x_n}^{\alpha_n} \dots D_{x_1}^{\alpha_1} f(x).$$

При $x_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) интеграл нулевого порядка естественно отождествлять с самой функцией $f(x)$; тогда все $\rho_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и $D_{x_k}^1 f(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} f(x)$.

Определим теперь класс C_{ρ}^{α} как множество функций $f(x) \in C_{\rho}^{\alpha}$, имеющих на G всевозможные производные $D^{\alpha} f(x)$ и удовлетворяющих условиям:

$$\sup |D^{\alpha} f(x)| \prod_{k=1}^n (1 + x_k^{\alpha_k}) < +\infty \quad (6)$$

для любых целых $q_k \geq 0$ и $m_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Введем в рассмотрение также последовательность положительных чисел M_q с кратным индексом $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ и обозначим

$$T(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sup_{|q|} \frac{r_1^{q_1} \dots r_n^{q_n}}{M_q}.$$

$$H(r) = T(r, r, \dots, r) = \sup_{|q|} \frac{r^{|q|}}{M_q}. \quad (7)$$

Наконец, введем два класса функций:

класс $C_{\rho}^{\alpha}(M_q)$ — множество функций $f(x) \in C_{\rho}^{\alpha}$, частные производные которых удовлетворяют оценкам:

$$\sup_0 \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k x_k^2) < A B^{|\alpha|} M_q (q_k \geq 0) \quad (8)$$

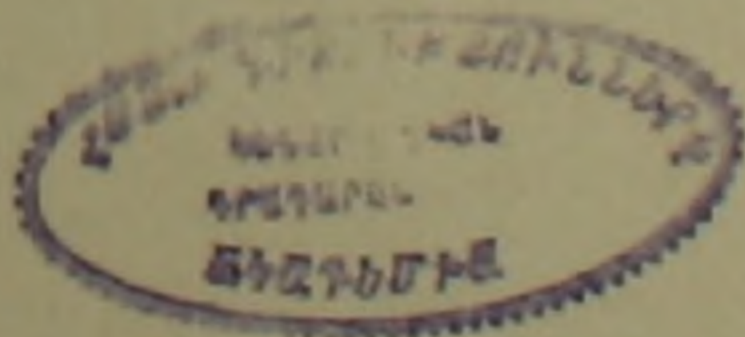
и класс $C_{\rho}^{\alpha}(M_q)$ — множество функций $f(x) \in C_{\rho}^{\alpha}$, дробные производные которых удовлетворяют оценкам

$$\sup_0 |D^{\alpha} f(x)| \leq A B^{|\alpha|} M_q \quad (q_k \geq 0), \quad (9)$$

где A и B постоянные, в общем зависящие от $f(x)$.

Отметим, что в случае $n = 1$ условия (5), (6), (8), и (9) определяют соответственно классы C_{ρ}^{α} , C_{ρ}^{α} , $C_{\rho}^{\alpha}([0, +\infty), M_q)$ и $C_{\rho}^{\alpha}([0, +\infty); M_q)$, введенные впервые М. М. Джрбашяном (1).

Сформулируем и докажем теперь основной результат настоящей статьи — теорему единственности для класса $C_{\rho}^{\alpha}(M_q)$ при $n \geq 2$.



Теорема 1. Пусть функция $f(x) \in C^n_*(M_q)$.

1. Если

$$D^{|q|_k} f(x)|_{x_k} = 0 \quad (q_k = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

и

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log \Theta(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha^*}}} dr = +\infty, \quad (11)$$

где $\alpha^* = \min_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k|$, а $\Theta(r)$ определяется по формуле (7), то $f(x) \equiv 0$ при $x \in G$.

2. Если

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log \Theta(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha^*}}} dr < +\infty, \quad (12)$$

то существует нетривиальная функция $f(x) \in C^n_*(M_q)$, удовлетворяющая условиям (10) (здесь под α^* следует подразумевать $\alpha^* = (\alpha^*, \alpha^*, \dots, \alpha^*)$).

Доказательство первой части теоремы проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 3 работы (2), поэтому мы приведем его лишь в общих чертах.

В первую очередь введем в рассмотрение n -кратный интеграл

$$\Phi(z) = \int_0^n \prod_{k=1}^n \left[E_{\rho_k} \left(-z_k x_k^{1/\rho_k}; \frac{1}{\rho_k} \right) x_k^{\frac{1}{\rho_k}-1} \right] f(x) d(x), \quad (13)$$

где $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $d(x) = dx_1 \dots dx_n$, а $E_\rho(z; \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\mu + \frac{m}{\rho})}$ ($\mu > 0, \rho > 0$) — целая функция типа Миттаг-Леффлера порядка ρ , типа 1, и докажем, что функция $\Phi(z)$ аналитична в области

$$\Delta^n_\beta = \left\{ z_k, |\arg z_k| < \frac{\pi}{2\beta_k}, 0 < |z_k| < +\infty \right\}_{k=1}^n, \quad \beta_k = \frac{1}{1+\alpha_k},$$

непрерывна в $\overline{\Delta^n_\beta}$ и допускает представление

$$\Phi(z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n z_k^{\alpha_k}} \int_0^n \prod_{k=1}^n \left[E_{\rho_k} \left(-z_k x_k^{\frac{1}{\rho_k}}; \frac{1}{\rho_k} \right) x_k^{\frac{1}{\rho_k}-1} \right] D^{|q|} f(x) d(x) \quad (14)$$

при $z \in \overline{\Delta^n_\beta}$.

Из леммы 4 работы (2) следует, что если рекуррентным образом построить функции

$$F_m(z_1, z_2, \dots, z_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \\ = \int_0^{+\infty} E_{\rho_m} \left(-z_m x_m^{\frac{1}{\rho_m}}; \frac{1}{\rho_m} \right) x_m^{\frac{1}{\rho_m}-1} F_{m-1}(z_1, \dots, z_{m-1}, x_m, \dots, x_n) dx_m$$

при $m = 1, 2, \dots, n$, где под $F_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ подразумевается $f(x)$, то они будут аналитичны в областях Δ_m^r , непрерывны в $\overline{\Delta}_m^r$ и допускают представления вида

$$F_m(z_1, z_2, \dots, z_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \\ = \frac{1}{\prod_{k=1}^m z_k^{\rho_k}} \int_0^m \prod_{k=1}^m \left[E_{\rho_k} \left(-z_k x_k^{\frac{1}{\rho_k}}; \frac{1}{\rho_k} \right) x_k^{\frac{1}{\rho_k}-1} \right] D^{\frac{|q|m}{\rho}} f(x) dx_1 \dots dx_m.$$

Отсюда при $m = n$ получается представление (14), и все утверждения относительно функции $\Phi(z)$ доказаны.

Докажем далее, что $\Phi(z) \equiv 0$. Этого можно достичь, придерживаясь схемы доказательства теоремы 3 работы (2), с существенным использованием условия (11) теоремы и леммы 2 работы (2).

Наконец, из определения функций $F_m(z_1, z_2, \dots, z_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ ($m = 1, 2, \dots, n$) на основании леммы 5 работы (2) последовательно получим

$$F_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}, x_n) = 0 \quad \text{при } z \in \Delta_3^{r-1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F_1(z_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \text{при } z \in \Delta_1^r$$

и

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

что и требовалось доказать в первой части теоремы.

Пусть теперь имеет место условие (12). Докажем существование нетривиальной функции $f(x) \in C_{\rho}^{\infty}[M_q]$, удовлетворяющей условиям (10).

Из условия (12) при $n = 1$ и теоремы 3 работы (2) вытекает существование функции $\varphi(x) \in C_{\rho}^{\infty}$, $\varphi(x) \neq 0$, удовлетворяющей условиям

$$\sup_{0 \leq x < +\infty} |D^{\frac{s}{\rho}} \varphi(x)| \leq AB^s \mu_s \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

и

$$D^{\frac{s}{\rho}} \varphi(0) = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \dots), \quad (16)$$

где $\mu_s = \ln |M_q|$.

Следуя П. Мелонгу ⁽¹⁾, введем выпуклую регуляризацию последовательностей $\log M_q$ и $\log \mu_s$. С этой целью в пространстве R^{n+1} с координатами $u_1, u_2, \dots, u_n, v$ рассмотрим сначала множество E полупрямых δ_q :

$u_1 = q_1, \dots, u_n = q_n, v \geq \log M_q$
 для всех $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ($q_k \geq 0$ — целые).

Проведем через начальную точку Q_q полупрямой δ_q плоскость с коэффициентами $(\log r_1, \dots, \log r_n, -1)$

$$v - \log M_q = \sum_{k=1}^n (u_k - q_k) \log r_k.$$

Если обозначить

$$v_q = \log M_q - \sum_{k=1}^n q_k \log r_k,$$

то последнее уравнение запишется в виде

$$v = v_q + \sum_{k=1}^n u_k \log r_k.$$

Отсюда видно, что v_q есть ордината этой плоскости в начале координат, а из определения (7) заключаем, что

$$-\log T(r_1, r_2, \dots, r_n) = \inf v_q.$$

Это означает, что если в R^{n+1} E^c есть выпуклая оболочка E , то $-\log T(r_1, r_2, \dots, r_n)$ является ординатой в начале координат плоскости, касательной к E^c с направляющими коэффициентами $(\log r_1, \log r_2, \dots, \log r_n, -1)$, причем эта плоскость оставляет E^c в полупространстве, определенном полупрямыми с положительными v . Для данных целых положительных чисел $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ E^c определяет полупрямую $v \geq \log M_q^c$, принадлежащую E^c . M_q^c — называется выпуклой регуляризацией последовательности M_q . Очевидно, что $M_q^c \leq M_q$.

Продолжаем ту же операцию для последовательности μ_s одного индекса. В пространстве $R^2(u, v)$ построим множество e полупрямых с целыми положительными коэффициентами $u = s, v \geq \log \mu_s$ ($s \geq 0$ — целые) и пусть e^c — его выпуклая оболочка.

Соотношение $v \geq \log \mu_s^c$ при $u = s$ определит полупрямую, определенную на e^c , причем $\mu_s^c \leq \mu_s$.

Из определения μ_s для выпуклых регуляризаций μ_s^c и M_q^c следует равенство

$$\mu_s^c = \min_{|q|=s} M_q^c, \quad (17)$$

а из (15) — соотношение

$$\sup_{0 \leq x < +\infty} |D_s^c \varphi(x)| \leq AB^s \mu_s^c \quad (s = 0, 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Определим теперь для целых неотрицательных значений функцию

$$l(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} \log \mu_s^c, & s \geq 1 \\ 0, & s = 1 \end{cases} \quad (19)$$

которая, начиная с некоторого определенного значения $s = s_0 > 1$, будет возрастающей, и $\lim_{s \rightarrow +\infty} l(s) = +\infty$. Это следует из того, что в противном случае, в силу выпуклости e^c , функция $l(s)$ имела бы конечный предел l_0 , для которого выполнялось бы неравенство $l(s) < l_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) при $s > s_1$. Но по определению μ_s^c , с учетом (7) имеем

$$\log \Theta(r) = \sup_{(s)} [s \log r - \log \mu_s^c] = \sup_{(s)} s [\log r - l(s)],$$

откуда следует $\log \Theta(r) = +\infty$ при $\log r > l_0 + \varepsilon$, что противоречит условию (12).

Составим функцию

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n), \quad (20)$$

где a — некоторая константа ($0 \leq x_k < +\infty$, $k = 1, 2, \dots, n$).

В силу (18) из (20) получим

$$|D_r^{|q|} f(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq a A^n B^{|q|} \mu_{q_1}^c \dots \mu_{q_n}^c. \quad (21)$$

Но так как $l(s)$ возрастает при $s \geq s_0$, то

$$\sum_{k=1}^n q_k l(q_k) \leq l(|q|) \sum_{k=1}^n q_k = |q| l(|q|)$$

при $|q| > s_2 > s_0$, что с учетом (19) влечет за собой соотношение

$$g(q_1, q_2, \dots, q_n) = (\mu_{q_1}^c \dots \mu_{q_n}^c) (\mu_{|q|}^c)^{-1} < 1, \quad |q| > s_2,$$

откуда, в свою очередь,

$$b = \sup_q g(q) < +\infty.$$

Выбирая в (20) число $a = b^{-1} A^{1-n}$, из (21) получим

$$\sup_0 |D_r^{|q|} f(x)| \leq A B^{|q|} \mu_{|q|}^c = A B^{|q|} \inf_{|r|=|q|} M_r^c,$$

что означает принадлежность функции $f(x)$ классу $C_{\alpha}^n(M_q)$.

Из условий (16) и определения (20) вытекают равенства (10), и тем самым теорема полностью доказана.

Наконец, используя метод доказательства теоремы 4 работы (2) в случае $n = 1$, на основании теоремы 1 можно доказать следующую теорему единственности для функций класса $C_{\alpha}^n(M_q)$:

Теорема 2. Пусть функция $f(x) \in C^n(M_q)$ при $n \geq 2$.
Тогда:

1. Если

$$D^{\frac{n+k}{2}} f(x)|_{x_k=0} = 0 \quad (q_k = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

и

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log \Theta(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha^*}{1+\alpha^*}}} dr = +\infty,$$

то $f(x) \equiv 0$ при $x \in G$.

2. Если

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log \Theta(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha^*}{1+\alpha^*}}} dr < +\infty,$$

то существует нетривиальная функция $f(x) \in C^n(M_q)$, удовлетворяющая условиям (22).

Ереванский государственный университет

Հ. Ս. ՔՈՉԱՐՅԱՆ

Միակուրյան բևեռման մի հանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Պ. Հելոնգի աշխատանքում ⁽¹⁾ բվազիանալիտիկոթյան պրոբլեմը տարածվել և լուծվել է մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների որոշ դասերի համար:

Հապես օգտագործելով Մ. Մ. Զրբաշյանի ⁽²⁾ ա — բվազիանալիտիկոթյան նոր, ընդհանուր գաղափարը, ներկա հոդվածում ⁽¹⁾ և ⁽²⁾ աշխատանքների արդյունքները ընդհանրացվում են մի քանի փոփոխականի որոշ ավելի ընդհանուր դասերի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Lelong Pierre, Annales de l'Institut Fourier, tome XII, 627—641, 1962. ² Մ. Մ. Джрбашян, Известия АН Арм. ССР, Математика, т. 3, № 3, 171—248 (1968). ³ Մ. Մ. Джрбашян, Г. С. Кочарян, „Известия АН СССР“, серия математика, т. 37, № 1, 98—134 (1973).