

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Х. О. Мовсисян

О единственности двойных рядов по системе Хаара,
сходящихся по сферам

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР А. А. Талаланом 24/XII 1976)

Будем рассматривать на единичном квадрате $[0, 1]^2$ двойной ряд по системе Хаара

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} \chi_{nm}(x, y), \quad (1)$$

где $\chi_{nm}(x, y) = \chi_n(x) \cdot \chi_m(y)$ (определение системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ см. в (1)).

В работах (2) и (3) рассмотрены вопросы единственности рядов (1), когда они сходятся по Принсгейму или сходятся повторно по строкам (столбцам). В этой заметке будет доказана одна теорема единственности для рядов (1), сходящихся по сферам. А именно

Теорема. Пусть $f(x, y)$ — ограниченная измеримая функция на $[0, 1]^2$, и ряд (1) удовлетворяет следующим условиям:

а) $\lim_{R \rightarrow \infty} S_R(x, y) = f(x, y)$ всюду на единичном квадрате $[0, 1]^2$, кроме, быть может, точек счетного числа отрезков $[x_n]$ и $[y_n]$, параллельных осям y и x соответственно, где

$$S_R(x, y) = \sum_{n^2 + m^2 \leq R^2} a_{nm} \chi_{nm}(x, y).$$

б) Для произвольной точки $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условиям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{nk}}{\chi_{nk}(x_0)} = 0 \quad \text{при любом } n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a_{nl}}{\chi_{nl}(y_0)} = 0 \quad \text{при любом } n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

где $\{\chi_{nk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\chi_{nl}(y)\}_{l=1}^{\infty}$ — множества всех тех функций системы Хаара, которые не равны нулю в точках x_0 и y_0 соответственно.

Тогда ряд (1) является рядом Фурье — Хаара функции $f(x, y)$ т. е.

$$a_{nm} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \gamma_{nm}(x, y) dx dy.$$

Для доказательства этой теоремы предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 1. Если коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условиям (2) и

$$S_{p,q_0}(x, y) = \sum_{n=0}^{p_0} \sum_{m=0}^{q_0} a_{nm} \gamma_{nm}(x, y) > c > 0$$

при $(x, y) \in \Delta_{p,q_0}$, где Δ_{p,q_0} — прямоугольник постоянства функции $\gamma_{p,q_0}(x, y)$, то для любого отрезка $[x_0]$ существуют натуральное число $p_1 > p_0$ и прямоугольник постоянства Δ_{p_1,q_0} функции $\gamma_{p_1,q_0}(x, y)$ такие, что

1. $\bar{\Delta}_{p,q_0} \cap [x_0] = \emptyset$, $\bar{\Delta}_{p,q_0} \subset \bar{\Delta}_{p_1,q_0}$.
2. $S_{p,q_0}(x, y) > c$ при $(x, y) \in \Delta_{p,q_0}$.

Лемма 2. Если коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условиям (3) и

$$S_{p,q_0}(x, y) > c > 0$$

при $(x, y) \in \Delta_{p,q_0}$, где Δ_{p,q_0} — прямоугольник постоянства функции $\gamma_{p,q_0}(x, y)$, то для любого отрезка $[y_0]$ существуют натуральное число $q_1 > q_0$ и прямоугольник постоянства Δ_{p,q_1} функции $\gamma_{p,q_1}(x, y)$ такие, что

1. $\bar{\Delta}_{p,q_0} \cap [y_0] \neq \emptyset$, $\bar{\Delta}_{p,q_0} \subset \bar{\Delta}_{p,q_1}$.
2. $S_{p,q_1}(x, y) > c$ при $(x, y) \in \Delta_{p,q_1}$.

В справедливости Лемм 1 и 2 можно убедиться, используя некоторые рассуждения, которые содержатся в доказательстве леммы 1 работы (2).

Лемма 3. Если коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условиям (2) и (3), а

$$S_{p,q_0}(x, y) > c > 0 \text{ при } (x, y) \in \Delta_{p,q_0},$$

где Δ_{p,q_0} — прямоугольник постоянства функции $\gamma_{p,q_0}(x, y)$, то для любых отрезков $[x_0]$ и $[y_0]$ существуют натуральные числа $p > p_0$, $q > q_0$ и прямоугольник постоянства $\Delta_{p,q}$ функции $\gamma_{p,q}(x, y)$ такие, что

1. $\bar{\Delta}_{p,q} \cap ([x_0] \cup [y_0]) = \emptyset$, $\bar{\Delta}_{p,q} \subset \bar{\Delta}_{p,q_0}$.
2. $S_{p,q}(x, y) = S_{R_{p,q}}(x, y) > c$ при $(x, y) \in \Delta_{p,q}$

где
$$S_{R_{p,q}}(x, y) = \sum_{n^2+m^2 \leq R_{p,q}^2} a_{nm} \gamma_{nm}(x, y), \quad R_{p,q}^2 = p^2 + q^2.$$

Доказательство. По леммам 1 и 2 существуют натуральные числа $p_1 > p_0$, $q_1 > q_0$ и прямоугольник постоянства Δ_{p_1,q_1} функции $\gamma_{p_1,q_1}(x, y)$ такие, что

$$\bar{\Delta}_{p_1, q_1} \subset \bar{\Delta}_{p, q}, \quad \bar{\Delta}_{p_1, q_1} \cap \{|x_0| \cup |y_0|\} = \emptyset$$

$$S_{p_1, q_1}(x, y) > c \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Delta_{p_1, q_1}.$$

Не нарушая общности можно предполагать, что

$$\left. \begin{aligned} \chi_{p_1}(x) &= \chi_n^{(i)}(x) \\ \chi_{q_1}(x) &= \chi_n^{(j)}(x) \end{aligned} \right\} 1 \leq i \leq j \leq 2^n.$$

Возможны два случая:

$$\text{а) Пусть } p_1^2 + q_1^2 = (2^n + i)^2 + (2^n + j)^2 < |2(2^n + i)|^2.$$

Тогда ясно, что

$$S_{p_1, q_1}(x, y) = S_{p, q}(x, y) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Delta_{p_1, q_1}$$

и в качестве p, q, Δ_{pq} в требовании леммы 3 можно взять $p_1, q_1, \Delta_{p_1, q_1}$ соответственно.

$$\text{а) Пусть } p_1^2 + q_1^2 = (2^n + i)^2 + (2^n + j)^2 \geq |2(2^n + i)|^2.$$

Последнее неравенство равносильно следующему неравенству

$$\frac{2^n + i}{2^n + j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (4)$$

Рассмотрим следующие возможные случаи:

б) Пусть на интервале $(\Delta_{p_1, q_1})_x$ — являющийся проекцией прямоугольника Δ_{p_1, q_1} на ось x , отлична от нуля функция $\chi_{2(2^n + i)}(x)$.

Имеем

$$|2(2^n + i)|^2 + (2^n + j)^2 < |2(2^n + j)|^2 \quad (5)$$

так как неравенство (5) равносильно неравенству

$$\frac{2^n + i}{2^n + j} < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

которое заведомо имеет место при выполнении условия (4).

Если положить $p_2 = 2p_1 = 2(2^n + i)$, то ясно, что $S_{p_2, q_1}(x, y) > c$ на некотором прямоугольнике постоянства Δ_{p_2, q_1} функции $\chi_{p_2, q_1}(x, y)$. Следовательно, из условия (5) и из того, что $2(2^n + j) \leq 2(2^n + i)2$ имеем

$$S_{p_2, q_1}(x, y) = S_{p, q}(x, y) > c \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Delta_{p_2, q_1} \subset \Delta_{p, q}$$

и в качестве p, q, Δ_{pq} в требовании леммы 3 можно взять $p_2, q_1, \Delta_{p_2, q_1}$ соответственно.

б) Пусть на интервале $(\Delta_{p_1, q_1})_x$ отлична от нуля функция $\chi_{p_1}(x)$, где $p_2 = 2(2^n + i) + 1$. Тогда

$$|2(2^n + i) + 1|^2 + (2^n + j)^2 < |2(2^n + j)|^2 \quad (6)$$

так как неравенство (6) равносильно неравенству

$$\frac{2(2^n + i) + 1}{2^n + j} < \sqrt{3}.$$

которое имеет место при условии (4) для любого $n \geq 1$. Ясно, что $S_{p,q}(x, y) > c$ на некотором прямоугольнике постоянства $\Delta_{p,q}$ функции $\gamma_{p,q}(x, y)$. Следовательно, из условия (6)

$$S_{p,q_1}(x, y) = S_{R_{p,q_1}}(x, y) > c \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Delta_{p,q_1} \subset \Delta_{p,q},$$

и в качестве p, q, Δ_{pq} в требовании леммы 3 можно взять p_1, q_1, Δ_{p,q_1} соответственно. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы. Можно считать, что

$$|f(x, y)| \leq 1, \quad (x, y) \in [0, 1]^2. \quad (7)$$

Возможны два случая:

1) Прямоугольные частные суммы $S_{nm}(x, y) = \sum_{l=0}^n \sum_{j=0}^m a_{lj} \gamma_{lj}(x, y)$, $n, m = 0, 1, \dots$ ряда (1) ограничены в совокупности на $[0, 1]^2$.

В этом случае ряд (1) является рядом Фурье—Хавара некоторой функции $F(x, y) \in L_2[0, 1]^2$, так как $\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}^2 < \infty$. Поэтому

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^2} |F(x, y) - S_R(x, y)|^2 dx dy = 0. \quad (8)$$

Из условия (8) следует существование некоторой подпоследовательности сферических частных сумм $\{S_{R_n}(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится к $F(x, y)$ почти всюду. Отсюда, в силу условия а) теоремы, вытекает, что $F(x, y) = f(x, y)$ почти всюду. Следовательно,

$$a_{nm} = \int_{[0,1]^2} F(x, y) \gamma_{nm}(x, y) dx dy = \int_{[0,1]^2} f(x, y) \gamma_{nm}(x, y) dx dy$$

и теорема в этом случае доказана.

2) Прямоугольные частные суммы $\{S_{nm}(x, y)\}_{n,m=0}^{\infty}$ ряда (1) не ограничены в совокупности.

Тогда найдутся точка $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$, с двоично-иррациональными координатами и натуральные числа n_0, m_0 такие, что $|S_{n_0, m_0}(x_0, y_0)| > 2$. Следовательно, выполняется одно из неравенств

$$S_{n_0, m_0}(x_0, y_0) > 2 \quad \text{или} \quad S_{n_0, m_0}(x_0, y_0) < -2.$$

Случай, когда выполняется второе из этих неравенств, сводится к случаю, когда выполняется первое. Для этого нужно вместо ряда (1)

рассматривать ряд $\sum_{n,m=0}^{\infty} -a_{nm} \gamma_{nm}(x, y)$.

Итак пусть выполняется первое неравенство

$$S_{n_0, m_0}(x_0, y_0) > 2. \quad (9)$$

Так как (x_0, y_0) — точка с двоично-иррациональными координатами, то из (9) следует существование натуральных чисел p_0 и q_0 , $p_0 \geq n_0$, $q_0 \geq m_0$ таких, что

$$S_{p,q}(x, y) = \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^q a_{nm} \gamma_{nm}(x, y) > 2, \quad (x, y) \in \Delta_{p,q},$$

где $\Delta_{p,q}$ — некоторый прямоугольник постоянства функции $\gamma_{p,q}(x, y)$.

По лемме 3 существуют натуральные числа $p_1 > p_0$, $q_1 > q_0$ и прямоугольник постоянства Δ_{p_1,q_1} функции $\gamma_{p_1,q_1}(x, y)$ такие, что

$$\bar{\Delta}_{p_1,q_1} \cap \{|x_1| \cup |y_1|\} = \emptyset, \quad \bar{\Delta}_{p_1,q_1} \subset \bar{\Delta}_{p,q_0}.$$

$$S_{p_1,q_1}(x, y) = S_{R,p_1,q_1}(x, y) > 2 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Delta_{p_1,q_1}.$$

При помощи применения леммы 3 по индукции получим последовательность вложенных прямоугольников $|\Delta_{p_k,q_k}|_{k=0}^\infty$, диаметры которых стремятся к нулю и

$$\Delta_{p_k,q_k} \cap \{|x_k| \cup |y_k|\} = \emptyset, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

$$S_{p_k,q_k}(x, y) = S_{R,p_k,q_k}(x, y) > 2 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Delta_{p_k,q_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Так как в последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ можно включить все двоично-рациональные точки отрезка $[0, 1]$, то из (10) следует, что пересечение всех прямоугольников $\bar{\Delta}_{p_k,q_k}$ состоит из точки (ξ, η) с двоично-иррациональными координатами. Ясно, что (ξ, η) отлична от всех тех точек, в которых ряд (1) не сходится к $f(x, y)$. Так как точка (ξ, η) принадлежит всем прямоугольникам Δ_{p_k,q_k} , $k = 1, 2, \dots$, то по условию (11) получено противоречие. Теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талалянцу за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

Институт математики Академии наук
Армянской ССР

Լ. Ն. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Դիֆերенցիալ գույքամիտող Հաարի կրկնակի շարժերի միակությունն մասին

Դիտարկենք

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} \gamma_{nm}(x, y) \quad (1)$$

կրկնակի շարքը բաց Հաարի սխառեմի և նշանակենք

$$S_R(x, y) = \sum_{n^2+m^2 \leq R^2} a_{nm} \gamma_{nm}(x, y).$$

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

Դիցուք $f(x, y)$ -ը չափելի, սահմանափակ ֆունկցիա է $[0, 1]^2$ — միավոր քառակուսու վրա և (1) շարքը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1. $\lim_{R \rightarrow \infty} S_R(x, y) = f(x, y)$ ամենուրեք $[0, 1]^2$ բառակուսու վրա, բացի.

միգուցե, հաշվելի քանակով $|x_n|$ և $|y_n|$ հատվածների կետերից, որոնք զուգահեռ են համապատասխանաբար y և x առանցքներին:

Զ. Ցանկացած $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ կետում (1) շարքի գործակիցները բավարարում են հետևյալ սրայմաններին.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{nkm}}{\chi_{n_k}(x_0)} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{nm_l}}{\chi_{n_l}(y_0)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

որտեղ՝ $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$, $\{\chi_{n_l}(y)\}_{l=1}^\infty$ Հաարի սիստեմի այն բոլոր ֆունկցիաներն են, որոնք հավասար չեն զերոյի համապատասխանաբար x_0 և y_0 կետերում:

Այդ դեպքում (1)-ը հանդիսանում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի Ֆուրյե—Հաարի շարքը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. Кагмаж и Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., 1958. ² Х. О. Мовсисян, «Известия АН Арм. ССР», Математика, т. XI, № 1 (1974). ³ Х. О. Мовсисян, «Известия АН Арм. ССР», Математика, т. XIII, № 4 (1976).