Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 3, 2026, стр. 28 – 34.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ ЕЕ НУЛИ, ПОЛЮСЫ И КЕПСТРАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Г. В. МИКАЕЛЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *gagik.mikaelyan@ysu.am*

Аннотация. Установлены формулы восстановления мероморфной функции через ее нули, полюсы и обобщенные кепстральные коэффициенты, а также только по ее модулю на окружности.

MSC2020 numbers: 94A12, 42A38, 30D30.
Ключевые слова: обработка сигналов, кепстр, ряды Фурье.

Одной из важных задач теории обработки сигналов является восстановление аналитической или мероморфной функции по ее модулю на окружности и по нулям и полюсам [1], [2]. В теории обработки сигналов такие задачи возникают при восстановлении спектра сигнала из его амплитудного распределения, при анализе систем с максимальной или минимальной фазой, а также при оценке стабильности и причинности линейных систем. Известно, что для классов функций максимальной или минимальной фазы знание модуля на единичной окружности влечет однозначное восстановление функции с точностью до постоянного фазового множителя. Функция минимальной фазы это мероморфная функция, все нули и полюсы которой находятся внутри единичного круга, а функция максимальной фазы это мероморфная функция все нули и полюсы находятся вне единичного круга [1], [2]. Хайес, Лим и Оппенгейм доказали, что если Z-преобразование конечной последовательности является рациональной функцией, не имеет нулей и полюсов на единичной окружности и инверсных друг друга пар нулей и полюсов, то последовательность восстанавливается по модулю с точностью до мультипликативной величины z^m [3].

Пусть f мероморфная в круге $\{z : |z| < R\}$ функция. Обозначим коэффициенты Фурье

$$c_k(r) \equiv c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| e^{-ik\theta} d\theta \quad (0 < r < R, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Последовательность $c_k(r,f)$ называется обобщенным кепстром(kepstrum) или последовательностью обобщенных кепстральных коэффициентов ([4]).

Если круг $\{z:|z|<R\}$ содержит единичную окружность, т.е. $R>1$, то последовательность $c_k(1,f)$ называется кепстром или последовательностью кепстральных коэффициентов

В настоящей статье установлены формулы восстановления мероморфной функции через ее нули, полюсы и обобщенные кепстральные коэффициенты $c_k(\rho,f)$ в любом круге $|z|<\rho(\rho<R)$. В отличии от классической факторизации Харди и Неванлинны наши формулы справедливы без ограничений на рост функции. Представление внешнего фактора через кепстральные коэффициенты делает результаты более применимыми к задачам восстановления сигналов. Исследованы вопросы о восстановлении мероморфной функции только по ее модулю на окружности. Из полученных результатов следуют известные утверждения о восстановлении функций минимальной и максимальной фазы и теоремы Хайеса, Лима и Оппенгейма.

Нам понадобится следующая лемма, доказанннная Неванлинной в 1923 году. На этой лемме основан так называемый «Метод рядов фурье для целых и мероморфных функций» [5] , [6].

Лемма 1. *Пусть f мероморфная в круге $\{z:|z|<R\}$ функция, $f(0)=1,\{a_v\},\{b_\mu\}$ -последовательности нулей и полюсов функции f и в некоторой окрестности точки $z=0$*

$$\log f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k.$$

Тогда справедливы формулы

$$c_0(r)=\sum_{|a_\nu|\le r}\log\frac{r}{|a_\nu|}-\sum_{|b_\mu|\le r}\log\frac{r}{|b_\mu|},$$

(1)

$$c_k(r)=\frac{1}{2}\alpha_k r^k+\frac{1}{2k}\sum_{|a_v|\le r}\left(\left(\frac{r}{a_v}\right)^k-\left(\frac{\overline{a_v}}{r}\right)^k\right)-\frac{1}{2k}\sum_{|b_\mu|\le r}\left(\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k-\left(\frac{\overline{b_\mu}}{r}\right)^k\right)$$

при $k\ge 1$ и $c_k=\overline{c_{-k}}$ при $k\le -1$.

Пусть f аналитичная в круге $\{z:|z|<R\}$ функция, $f(0)=1$, с нулями $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$. Так как f на окружности $|z|=\rho(0<\rho<R)$ имеет конечное число нулей, то при любом $0<\rho<R$

$$\log\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\in L_2[-\pi,\pi]\quad\text{и}\quad\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(\rho,f)|^2<\infty.$$

По теореме Рисса-Фишера существует функция $F_\rho \in L_2[-\pi,\pi]$, что для каждого ρ в смысле сходимости метрики L_2

$$F_\rho(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(\rho) e^{ik\varphi}.$$

При $|z| < \rho < R$ обозначим

$$b_\rho(z, a_m) = \frac{\rho(a_m - z)}{\rho^2 - \bar{a}_m z} \frac{\bar{a}_m}{|a_m|}, \quad B_\rho(z, \{a_m\}) = \prod_{|a_m|<\rho} b_\rho(z, a_m),$$

$$\Omega_\rho(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho e^{i\varphi} + z}{\rho e^{i\varphi} - z} F_\rho(\varphi) d\varphi \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть f аналитичная в круге $\{z : |z| < R\}$ функция, $f(0) = 1$, с нулями $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$. Тогда при любом $\rho (0 < \rho < R)$ в круге $|z| < \rho$ справедлива формула $f(z) = B_\rho(z, \{a_m\})\, \Omega_\rho(z)$.*

Доказательство. Обозначим $f_\rho(z) = B_\rho(z, \{a_m\})\, \Omega_\rho(z)$. Способ построения функции $f_\rho(z)$ исходит из [5]. Докажем, что $f(z) = f_\rho(z)$ при $|z| < \rho$.

Функция $f_\rho(z)$ аналитична в круге $\{z : |z| < \rho\}$, с нулями $\{a_m\}, |a_m| < \rho$. Имеем

$$f_\rho(0) = \prod_{|a_m|<\rho} \frac{|a_m|}{\rho} \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_\rho(\varphi) d\varphi \right\} = \prod_{|a_m|<\rho} \frac{|a_m|}{\rho} \exp\{c_0(\rho)\} = 1.$$

Покажем, что при $r < \rho, \quad c_k(r, f_\rho) = c_k(r, f)$. Обозначим коэффициенты Фурье

$$b_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|B_\rho\left(re^{i\theta}, \{a_m\}\right)\right| e^{-ik\theta} d\theta.$$

В [7] доказано (см. также [8]), что $b_k(r)$ вычисляются по формуле

$$(2)\quad b_k(r) = -\frac{1}{2k} \sum_{|a_m|\le r} \left(\frac{\bar{a}_m}{r}\right)^k + \frac{1}{2k} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \sum_{|a_m|<\rho} \left(\frac{\bar{a}_m}{\rho}\right)^k - \frac{1}{2k} \sum_{r<|a_m|<\rho} \left(\frac{r}{a_m}\right)^k.$$

При $r < \rho$ из разложения

$$\frac{\omega + z}{\omega - z} = \frac{\rho e^{i\varphi} + z}{\rho e^{i\varphi} - z} = 1 + \frac{2z}{\rho e^{i\varphi} - z} = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k e^{ik(\theta-\varphi)}, \quad z = re^{i\theta}$$

следует представление

$$\log|\Omega_\rho(z)| = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k e^{ik(\theta-\varphi)}\right) F_\rho(\varphi) d\varphi =$$

$$= \operatorname{Re}\left(c_0(\rho) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k e^{ik\theta} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\varphi} F_\rho(\varphi) d\varphi\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(c_0(\rho) + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k e^{ik\theta} c_k(\rho)\right).$$

Поскольку

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{|k|}c_k(\rho)e^{ik\theta}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k}c_{-k}(\rho)e^{-ik\theta}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k}c_k(\rho)e^{ik\theta}+c_0(\rho)=$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k}\overline{c_k(\rho)e^{\imath k\theta}}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k}c_k(\rho)e^{ik\theta}+c_0(\rho)=\mathrm{Re}\left(c_0(\rho)+2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k}e^{ik\theta}c_k(\rho)\right),$$

то при $k\geq 1$

$$c_k\left(r,f_\rho\right)=\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k}c_k(\rho)+b_k(r).$$

Отсюда, в силу (1) и (2) получаем равенство коэффициентов Фурье функций f и f_ρ. Докажем, что $f(z)=f_\rho(z)$ при $|z|<\rho$. Рассмотрим функцию

$$g(z)=\frac{f(z)}{f_\rho(z)}\quad(|z|<\rho).$$

Имеем

$c_k(r,g)=c_k(r,f)-c_k\left(r,f_\rho\right)=c_k(r,f)-c_k(r,f)=0,\quad 0\leq r<\rho$. Отсюда следует, что $|g(z)|\equiv 1$, но так как $g(0)=1$, то $g(z)\equiv 1$ при $|z|<\rho$.

Из теоремы 1 следует следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть f мероморфная в круге $\{z:|z|<R\}$ функция, $f(0)=1$, с нулями $\{a_m\}_{m=1}^{n}$ и полюсами $\{b_m\}_{m=1}^{k}$. Тогда при $|z|<\rho(0<\rho<R)$ справедливо представление*

$$f(z)=B_\rho\left(z,\{a_m\}\right)/B_\rho\left(z,\{b_m\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}F_\rho(\varphi)d\varphi\right\},$$

где

$$F_\rho(\varphi)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(\rho,f)e^{ik\varphi}.$$

Если в окрестности нуля $f(z)\sim cz^\lambda$, то справедливо представление

$$f(z)=cz^\lambda B_\rho\left(z,\{a_m\}\right)/B_\rho\left(z,\{b_m\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}F_\rho(\varphi)d\varphi\right\}.$$

Теорема 3. *Пусть f мероморфная в области $\{z:|z|>R\}$ функция, $f(\infty)=1$, с нулями $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ и полюсами $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$. Тогда при $|z|>\rho(\rho>R)$ справедливо представление*

$$f(z)=\prod_{|a_m|>\rho}b_\rho\left(z,a_m\right)/\prod_{|b_m|>\rho}b_\rho\left(z,b_m\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}F_\rho(\varphi)d\varphi\right\},$$

где

$$F_\rho(\varphi)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(\rho,f)e^{ik\varphi}.$$

Рассмотрим функцию

$$h(z) = f\left(\frac{R^2}{z}\right), |z| < R.$$

Если $|z| < R$, то $\left|\frac{R^2}{z}\right| > R$ и нули функции h являются $\left\{\frac{R^2}{a_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$, а полюсы $\left\{\frac{R^2}{b_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$. Применяя для функции h теорему 2 и сделав замену переменной, получаем доказательство теоремы 3.

Определение 1. *Мероморфная функция f называется обобщенно минимальной фазы, если все ее нули и полюсы находятся в круге $\{z : |z| < R\}$ и обобщенно максимальной фазы, если нули и полюсы находятся в области $\{z : |z| > R\}$.*

Следствие 1. *Если мероморфная функция f не имеет нулей и полюсов в круге $\{z : |z| < R\}$ (т. е. она обобщенно максимальной фазы), $f(0) = 1$, то f определяется только обобщенным кепстром формулой*

$$f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}F_R(\varphi)d\varphi\right\}.$$

Следствие 2. *Если все нули и полюсы мероморфной функции f находятся в круге $\{z : |z| < R\}$ (т. е. она обобщенно минимальной фазы) и $f(\infty) = 1$ (т.е. она рациональная функция), то f определяется только обобщенным кепстром формулой*

$$f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}F_R(\varphi)d\varphi\right\}$$

Если в окрестности бесконечно удаленной точки $f(z) \sim cz^{\lambda}$, то формула принимает вид

$$f(z) = cz^{\lambda}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}F_R(\varphi)d\varphi\right\}$$

Замечание 1. *Если в теоремах 1 и 2 имеем $R > 1$ а в теореме 3 имеем $R < 1$, то соответственные формулы содержат представления через кепстр. Если в следствиях 1 и 2 имеем $R = 1$, то в представлениях участвует кепстр.*

Следствие 3. *Если модули полиномов*

$$P_1(z) = a_{\lambda_1}z^{\lambda_1} + \cdots + a_{n_1}z^{n_1}, \quad n_1 > \lambda_1 \geq 0,$$
$$P_2(z) = a_{\lambda_2}z^{\lambda_2} + \cdots + a_{n_2}z^{n_2}, \quad n_2 > \lambda_2 \geq 0$$

совпадают на единичной окружности и они не имеют нулей на единичной окружности и инверсных друг друга нулей, то эти полиномы совпадают с точностью до мультипликативной величины cz^m.

Доказательство. Пусть $\{a_m\}$ и $\{b_m\}$ нули полиномов P_1 и P_2 соответственно. Рассмотрим функции $\frac{P_1(z)}{a_{\lambda_1}z^{\lambda_1}}$, $\frac{P_1(z)}{a_{n_1}z^{n_1}}$ и применим теоремы 1 и 3 . При $|z|=1$ будем иметь

$$P_1(z)=a_{\lambda_1}z^{\lambda_1}\prod_{|a_m|<1}b_1\left(z,a_m\right)\Omega_1(z)=a_{\lambda_1}z^{\lambda_1}B_1^{(1)}(z)\Omega_1(z),$$
$$P_1(z)=a_{n_1}z^{n_1}\prod_{|a_m|>1}b_1\left(z,a_m\right)\Omega_1(z)=a_{n_1}z^{n_1}B_1^{(2)}(z)\Omega_1(z).$$

Имеем также

$$P_2(z)=a_{\lambda_2}z^{\lambda_2}\prod_{|b_m|<1}b_1\left(z,b_m\right)\Omega_1(z)=a_{\lambda_2}z^{\lambda_2}B_2^{(1)}(z)\Omega_1(z),$$
$$P_2(z)=a_{n_2}z^{n_2}\prod_{|b_m|>1}b_1(z,b)\Omega_1(z)=a_{n_2}z^{n_2}B_2^{(2)}(z)\Omega_1(z).$$

Тогда при $|z|=1$, замечая, что

$$B_l^{(j)}(z)=\frac{1}{\bar{B}_l^{(J)}(z)},\quad (j,l=1,2),$$

вычислив модули функций P_l $\left(|P_l|^2=P_l\bar{P}_l\right)$ и приравнивая, получаем

$$a_{\lambda_1}\bar{a}_{n_1}z^{\lambda_1}z^{n_2}\frac{B_1^{(1)}(z)}{B_1^{(2)}(z)}=a_{\lambda_2}\bar{a}_{n_2}z^{\lambda_2}z^{n_1}\frac{B_2^{(1)}(z)}{B_2^{(2)}(z)}.$$

Откуда по теореме единственности получаем, что нули полиномов P_1 и P_2 одинаковые и следовательно они могут отличатся только постоянным множителем cz^m. Из теоремы 1 получаются следующие результаты Хайеса, Лима, Оппенгейма [3].

Следствие 4. *Если $|f_1|=|f_2|$ на единичной окружности и нули рациональных функций f_1 и f_2 находятся внутри, а полюсы вне единичной окружности и пары нулей и полюсов не инверсны, то эти функции совпадают с точностью до постоянного множителя ($f_1(0)=f_2(0)=1, f_1(\infty)=f_2(\infty)=1$).*

Следствие 5. *Если $|f_1|=|f_2|$ на единичной окружности и полюсы рациональных функций f_1 и f_2 находятся внутри, а нули вне единичной окружности и пары нулей и полюсов не инверсны, то эти функции совпадают с точностью до постоянного множителя ($f_1(0)=f_2(0)=1, f_1(\infty)=f_2(\infty)=1$).*

Замечание 2. *Если в следствиях 4 и 5 вместо условий $f_j(0)=1, f_j(\infty)=1$ ($j=1,2$) будет $f_j(z)\sim c_jz^{\lambda_j}$, то $f_1(z)=cz^{\lambda}f_2(z)$, где $c=\frac{c_1}{c_2}$, $\lambda=\lambda_1-\lambda_2$.*

Доказательство следствия 4. Пусть $\{\alpha_m\}$ и $\{\beta_m\}$ нули и полюсы функции f_1 а $\{\gamma_m\}$ и $\{\mu_m\}$ нули и полюсы функции f_2. Тогда при $|z| = 1$ имеем

$$f_1(z) = \prod_{|\alpha_m|<1} b_1(z, \alpha_m)\, \Omega_1(z) = B_\alpha(z)\Omega_1(z),$$

$$f_1(z) = \frac{1}{\prod\limits_{|\beta_m|>1} b_1(z, \beta_m)}\Omega_1(z) = \frac{\Omega_1(z)}{B_\beta(z)},$$

$$f_2(z) = \prod_{|\gamma_m|<1} b_1(z, \gamma_m)\, \Omega_1(z) = B_\gamma(z)\Omega_1(z),$$

$$f_2(z) = \frac{1}{\prod\limits_{|\mu_m|>1} b_1(z, \mu_m)}\Omega_1(z) = \frac{\Omega_1(z)}{B_\mu(z)}.$$

Тогда

$$\frac{B_\alpha(z)}{B_\mu(z)} = \frac{B_\gamma(z)}{B_\beta(z)}.$$

Откуда по теореме единственности получаем, что нули и полюсы функций f_1 и f_2 одинаковые и, следовательно, они могут отличатся только постоянным множителем. Следствие 5 доказывается аналогично или рассмотрением функций $\frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_2}$.

Abstract. Formulas are established for recovering a meromorphic function through its zeros, poles, and generalized cepstral coefficients, as well as only its absolute value on the circle.

Список литературы

[1] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, Digital Signal Processing, Prentice-Hall (2010)
[2] J. G. Proakis, D. G. Manolakis, Digital Signal Processing, Prentice-Hall (2007).
[3] M. H. Hayes, J. S. Lim, A. V. Oppenheim, "Signal reconstruction from phase or magnitude", IEEE Trans. Acoustics, Speech, and signal processing, Vol. ASSP-28, No. 6, 672 – 680 (1980).
[4] Г. В. Микаелян, В. Г. Микаелян, "Исследование сепстра и кепстра методом рядов и преобразований Фурье для целых и мероморфных функций", Изв. НАН Армении, **60**, no. 6, 62 – 74 (2025).
[5] L. A. Rubel, B. A. Taylor, "A Fourier series method for meromorphic and entire functions", Bulletin de la Société Mathématique de France **96**, 53 – 96 (1968).
[6] А. А. Кондратюк, Ряды Фурье и мероморфные функции, Львов, Изд. Вища школа (1988).
[7] G. R. Maclane, L. A. Rubel, "On the growth of Blaschke product", Canadian J. of Math. **XXI**, N 3, 595 – 601 (1969).
[8] Г. В. Микаелян, "О росте произведений Бляшке-Джрбашяна", Изв АН Арм ССР, Сер. Матем., **XVI**, N 6, 478 – 497 (1981).

Поступила 29 декабря 2025
После доработки 11 февраля 2026
Принята к публикации 15 февраля 2026