ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIV 1977 2

УДК 519.82+512.831

МАТЕМАТИКА

Ю. Г. Анастасян

Некоторые свойства двудольных гиперграфов

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 30/VII 1976)

Многие прикладные комбинаторные задачи сводятся к задаче целочисленного линейного программирования и если при этом матрица ограничений является вполне унимодулярной, то эта задача решается методами линейного программирования ([1]).

Напомним, что матрица называется вполне унимодулярной, если все ее миноры равны либо 0, либо ± 1.

Чтобы проверить, обладает ли матрица свойством вполне унимодулярности, надо провести большую работу, если перебирать все миноры матрицы. Существуют, однако, достаточные (но не необходимые) условия вполне унимодулярности матриц, которые проверяются гораздо легче.

В работе ([2]) рассмотрен класс двудольных гиперграфов. Доказано, что матрица инциденций двудольного гиперграфа вполне унимодулярна. Эта теорема является обобщением известной теоремы Хеллер-Томкинс-Гейл ([5]) и существенно расширяет подкласс унимодулярных матриц, являющиеся матрицами инциденций двудольных графов.

Гиперграф ([3]) $H=(X;\varepsilon)$ состоит из n-элементного множества X, называемых вершинами, и семейства $\varepsilon=\{E_i/i\in I\}$, m — непустых подмножеств X, называемых ребрами.

Цепью называется последовательность вершин и ребер (x_1; E_1; x_2; E_2; x_3; ... ; E_p ; x_{p+1}) таких, что

1. Все x_j — различные вершины H (для $j\leqslant p$).
2. Все E_i — различные ребра H (для $i\leqslant p$).
3. x_j ; $x_{j+1}\in E_j$ (для $j\leqslant p$).

Длиной цепи называется число его ребер — p. Если $p>1$ и если $x_{p+1}=x_1$, то цепь образует цикл.

Гиперграф H, не содержащий циклов нечетной длины, называется двудольным.

Данному гиперграфу $H=(X;\varepsilon)$ сопоставим двудольный граф $\Gamma(X;\varepsilon;V)$ следующим образом:

$$(x_j;\ E_i) \in V \longleftrightarrow x_j \in E_i$$

Теорема 1. *Гиперграф $H=(X;\varepsilon)$ двудольный тогда и только тогда, когда в графе $\Gamma(X;\varepsilon;V)$ не существует простого цикла длины $2(2q-1)$, где $q\geqslant 2$.*

Доказательство. Действительно, если в $H=(X;\varepsilon)$ имеется цикл нечетной длины:

$$(x_1;E_1;x_2;E_2;\ldots;\ x_{2q-1};\ E_{2q-1};\ x_1) \tag{1}$$

то (1) будет простым циклом в $\Gamma(X;\varepsilon;V)$ длиной $2(2q-1)$, $q\geqslant 2$ и наоборот, если (1) простой цикл в $\Gamma(X;\varepsilon;V)$, то (1) является нечетным циклом в $H=(X;\varepsilon)$.

Из этого следует, что теорема верна.

В дальнейшем будем пренебрегать циклами, длина которых не больше двух.

Матрица смежности $D=\|d_{ij}\|$ двудольного графа $\Gamma(S;T;V)$ определяется следующим образом:

$$d_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ если } (s_i;\ t_j)\in V & i=1;2;\ldots;|S| \\ 0, \text{ если } (s_i;\ t_j)\notin V & j=1;\ 2;\ldots;|T| \end{cases}$$

Из теоремы 1, из теоремы, доказанной в [3] и из того, что двудольный граф не содержит простого цикла нечетной длины, следует следующая теорема.

Теорема 2. *Если в двудольном графе длина каждого простого цикла кратна четырем, то его матрица смежности вполне унимодулярна.*

Таким образом, чтобы выяснить, является ли гиперграф $H=(X;\varepsilon)$ двудольным, достаточно проверить существует ли простой цикл длины, не кратной четырем, в двудольном графе $\Gamma(X;\varepsilon;V)$. Дадим одно необходимое и достаточное условие для проверки, содержится ли в двудольном графе простой цикл длины, не кратной четырем.

Пусть $\Gamma(S;T;V)$ — двудольный граф, $\Gamma_p(V;W)$ — его реберный граф [4]. Двудольному графу $\Gamma(S;T;V)$ сопоставим ориентированный граф $G(Y;R)$ по следующим правилам.

Построим некоторые множества

$$W'=\{(\alpha;\beta)/(\alpha;\beta)\in W;\ \alpha\cap\beta\in T\}$$

$$W''=\{(\alpha;\beta)/\ (\alpha;\beta)\in W;\ \alpha\cap\beta\in S\}$$

Y — это множество всех упорядоченных пар из множества W', то есть если $(\alpha;\beta)\in W'$, то $(\alpha;\beta)\in Y$ и $(\beta;\alpha)\in Y$.

$$\{(\alpha;\beta);\ (\gamma;\delta)\}\in R \longleftrightarrow \{(\alpha;\beta)\in Y;\ (\gamma;\delta)\in Y,\ (\beta;\gamma)\in W''\}.$$

Таким образом, мы построили ориентированный граф $G(Y;\ R)$.

Теорема 3. *Для того, чтобы двудольный граф $\Gamma(S; T; V)$ не содержал простого цикла длины, не кратной четырем, необходимо и достаточно, чтобы $G(Y; R)$ не содержал ориентированного цикла нечетной длины.*

Доказательство. Покажем, что если в $\Gamma(S; T; V)$ существует цикл длины, не кратной четырем, то в графе $G(Y; R)$ существует ориентированный цикл нечетной длины.

Пусть в графе $\Gamma(S; T; V)$ существует цикл длины, не кратной четырем, тогда длина этого цикла равна $4q-2 = 2(2q-1)$, так как в двудольном графе не существует цикла нечетной длины.

Очевидно, что $q>1$ и пусть этот цикл есть:

$$(s_1; t_1; s_2; t_2; \ldots; s_{2q-1}; t_{2q-1}; s_{2q}), \quad s_1 = s_{2q}$$

Обозначим:

$$\alpha_i = (s_i; t_i), \quad \beta_i = (t_i; s_{i+1}), \quad i = 1; 2; \ldots; 2q-1.$$

Так как $\alpha_i \cap \beta_i = t_i \in T$ и $\beta_i \cap \alpha_{i+1} = s_{i+1} \in s$, $i = 1; 2; \ldots; 2q-1$ следует, что

$$(\alpha_i; \beta_i) \in' W, \qquad (\beta_i; \alpha_{i+1}) \in W''$$

$$i = 1; 2; \ldots; 2q-1 \text{ и } \alpha_{2q} = \alpha_1$$

Отсюда следует, что последовательность

$$[(\alpha_1; \beta_1), (\alpha_2; \beta_2), \ldots; (\alpha_{2q-1}; \beta_{2q-1})] \tag{2}$$

является ориентированным циклом в графе $G(Y; R)$ нечетной длины равной $2q-1$.

Докажем обратное. Пусть $G(Y; R)$ содержит ориентированный нечетный цикл (2).

Возьмем $\alpha_i = (s_i; t_i)$, $\beta = (s'_i, t'_i)$, $i = 1; 2; \ldots; 2q-1$.

Тогда $t_i = t'_i$; $i = 1; 2; \ldots, 2q-1$, так как $(\alpha_i; \beta_i) \in W'$ $i = 1; 2; \ldots; 2q-1$ и из того, что $(\beta_i; \alpha_{i+1}) \in W''$, $i = 1; 2; \ldots; 2q-1$; $\alpha_{2q} = \alpha_1$ следует, что $s'_i = s_{i+1}$, $i = 1; 2; \ldots; 2q-1$, следовательно в графе $\Gamma(s; T, V)$ имеем цикл длины $2(2q-1)$; $q \geq 2$.

$$(s_1; t_1; s_2; t_2; \ldots; s_{2q-1}; t_{2q-1}; s_{2q}), \quad s_1 = s_{2q}. \tag{3}$$

Из построения графа $G(Y; R)$ следует, что

$$\begin{aligned} s_i &\neq s_{i+1} \qquad i = 1; 2; \ldots; 2q-1 \\ t_j &\neq t_{j+1} \qquad j = 1; 2; \ldots; 2q-1 \end{aligned} \tag{4}$$

иначе следовало бы $\alpha_i = \beta_i$ или $\beta_i = \alpha_{i+1}$, что противоречит определению множеств W' и W''.

Если (3) не простой цикл, то он разлагается на простые циклы, где длина каждого простого цикла больше или равна четырем, так как последовательность (3) удовлетворяет условию (4). Следовательно, среди этих простых циклов легко заметить, что существует простой цикл, имеющий длину $2(2q'-1)$, где $q \geqslant q' > 2$.

Значит длина этого цикла не будет кратной четырем.

Теорема доказана.

Существование ориентированного цикла нечетной длины в $G(Y; R)$ или цикла, длина которого не кратна четырем в графе $\Gamma(X; \varepsilon; V)$ можно выяснить ([5]) при помощи возведения в степень матрицы смежности данного графа.

Ереванский НИИ математических машин

ՅՈՒ. Գ. ԱՆԱՍՏԱՍՅԱՆ

Երկկողմանի հիպերգրաֆների մի քանի հատկություններ

([2]) Հոդվածում ապացուցվում է, որ երկկողմանի հիպերգրաֆի հարակից մատրիցան լրիվին ունիմոդուլյար է, որը առանձնացնում է մատրիցաների մի դաս, որոնց համար ամբողջաթիվ գծային ծրագրավորման խնդիրը կարելի է լուծել գծային ծրագրավորման մեթոդներով։

Այս հոդվածում տրվում է անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի հիպերգրաֆը լինի երկկողմանի։ Այդ պայմանները կոնստրուկտիվ հնարավորություն են տալիս ավելի լայն դասի մատրիցաների (քան երկկողմանի գրաֆների հարակից մատրիցաները) համար, բացահայտելու ունիմոդուլյար հատկությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Дж. Гоффман, Дж. Б. Краскал*, В сб.: «Линейные неравенства», ИЛ, М., 1959. [2] *Ю. Г. Анастасян*, «Кибернетика», № 3, 1975. [3] *C. Berge*, „Mathematical Programming", 19—31, 2 (1972). [4] *Ф. Харари*, Теория графов, „Мир", М., 1973. [5] *К. Берж*, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.