УДК 51 01 : 518.5

МАТЕМАТИКА

А. А. Мокшян

**Некоторые свойства релятивизованных сложностей
 Колмогорова**

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 29/VII 1976)

Мы будем пользоваться терминологией и понятиями, введенными в (1-4). В частности через l обозначим следующую функцию

$$l(x) = \lfloor \log_2(x+1) \rfloor.$$

Определим трехместные предикаты P, K, M следующим образом:

$$P(y, \varphi, x) \leftrightarrow ((\varphi(x) = y) \& \forall z (l(z) < l(x) \rightarrow \neg (\varphi(z) = \varphi(x))),$$

$$K(y, \varphi, x) \leftrightarrow \exists z (P(y, \varphi z) \& l(z) = x),$$

$$M(\varphi, \psi, c) \leftrightarrow \forall x y (\psi(x) = y \rightarrow \exists z (\varphi(z) = y \& l(z) < l(x+c)),$$

где φ, ψ — переменные, допустимыми значениями которых являются одноместные частичнорекурсивные функции (ч. р. ф.), а x, y, z, c — переменные, допустимыми значениями которых являются натуральные числа.

Будем говорить, что натуральное число x есть сложность натурального числа y относительно одноместной ч. р. ф. φ , если $K(y, \varphi, x)$.

Определение. Одноместная ч. р. ф. F_0 называется асимптотически оптимальной функцией для частичнорекурсивных функций или оптимальной функцией, если для любой ч. р. ф. φ

$$\exists c M(F_0, \varphi, c).$$

В (1) доказано существование оптимальной функции. Тогда, если F_0 оптимальная функция, то для любой ч. р. ф. φ

$$\exists c \forall x y (K(y, \varphi, x) \rightarrow \exists z (K(y, F_0 z) \& z < x+c))$$

Определим двуместные предикаты L_1, L_2, L_3

$$L_1(\varphi, \psi) \leftrightarrow \exists c M(\varphi, \psi, c)$$

$$L_2(\varphi, \psi) \leftrightarrow L_1(\varphi, \psi) \& \neg L_1(\psi, \varphi)$$

$$L_3(\varphi, \psi) \leftrightarrow L_1(\varphi, \psi) \& L_1(\psi, \varphi)$$

Тогда, если F_0 — оптимальная функция и F_1 — ч. р. ф., то
 F_1 — оптимальная функция $\leftrightarrow L_3(F_0, F_1)$
 $\forall$ ч. р. ф. $\varphi(\neg L_2(\varphi, F_0))$.

Для произвольного фиксированного множества A осуществим полную релятивизацию вышеуказанных понятий. (Мы будем обозначать релятивизованные предикаты так же, как и соответствующие не релятивизованные предикаты. Для релятивизованных предикатов P, K, M, L_1, L_2, L_3 допустимыми значениями функциональных переменных будут одноместные A — частично рекурсивные функции.)

Результатом полной релятивизации понятия оптимальной функции является понятие функции, асимптотически оптимальной для A — частично рекурсивных функций:

Через F_0 обозначим некоторую фиксированную оптимальную функцию.

Для произвольного множества A через F_0^A обозначим некоторую фиксированную функцию, асимптотически оптимальную для A — частично рекурсивных функций.

Пусть M — область определения F_0 , K — креативное множество. Легко показать, что $L_2(F_0^K, F_0)$
(т. к. $L_2(F_0^M, F_0)$ и $M \leq_T K$).

Известно (*), что область определения любой оптимальной функции есть T — полное множество. Несмотря на это, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. $\forall A((d(A') > O') \Rightarrow L_2(F_0^A, F_0))$

Доказательство. Как уже отмечалось истинно следующее утверждение:

Не существует функции, асимптотически оптимальной для частично рекурсивных функций и такой, что ее областью является множество, которое рекурсивно в $\{x | x \in W_x\}$, но в котором $\{x | x \in W_x\}$ не рекурсивно (1).

Отсюда следует истинность утверждения (2), которое получается из утверждения (1) полной релятивизацией (для произвольного множества A).

Не существует функции, асимптотически оптимальной для A — частично рекурсивных функций и такой, что ее областью определения является множество, которое A — рекурсивно в $\{x | x \in W_x^A\}$, но в котором $\{x | x \in W_x^A\}$ не A — рекурсивно. (2).

Так как $\forall A \forall B (B \text{ } A\text{-рекурсивно в } A' \Leftrightarrow B \text{ рекурсивно в } A')$, то из (2) следует:

Не существует функции, асимптотически оптимальной для A — частично рекурсивных функций и такой, что тьюрингова степень ее области определения $< d(A')$. (3).

Пусть множество A таково, что $d(A') > O'$.

Тогда $L_1(F_0^A, F_0)$. С другой стороны $\neg L_1(F_0, F_0^A)$, так как в противном случае имело бы место $L_2(F_0, F_0^A)$ и функция F_0 могла бы выступать в качестве асимптотически оптимальной для A — частично рекурсивных функций. Однако тьюрингова степень ее области определения $= O' < d(A')$, что противоречит утверждению (3).

Значит $L_2(F_0^A, F_0)$.

Полная релятивизация этого результата дает Следствие 1.1.

$$\forall A \forall B ((d(A) > d(B) \ \& \ d(A') > d(B')) \Rightarrow L_2(F_0^B, F_0^A))$$

Следствие 1.2. $(C, G, A$ — множества такие, что $d(C)$ рекурсивно перечислима в O' & G рекурсивно перечислимо & $d(G') < d(C)$ & $d(A) \leq O'$ & $d(A) \leq d(G)) \Rightarrow \exists$ бесконечная последовательность $D_1, D_2, \dots$ ($\forall i (D_i$ рекурсивно перечислимо & $d(A) \leq d(D_i)$ & $d(G) < d(D_1) < d(D_2) < \dots$

$$\ \& \ d(G') < d(D_1) < d(D_2) < \dots < d(C) \ \&$$

$$\ \& \ L_2(F_0^{D_1}, F_0^C) \ \& \ L_2(F_0^{D_2}, F_0^{D_1}) \ \& \ L_2(F_0^{D_3}, F_0^{D_2}) \ \& \ \dots)$$

Доказательство. Сакс (*) доказал следующую теорему: $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{g}$ степени такие, что $\underline{a} \leq \underline{b}'$ & $\underline{b} \leq \underline{g}$ & $\underline{g}' \leq \underline{c}$ & $\underline{a} \leq \underline{g}$ & $\underline{g}$ рекурсивно перечислима в $\underline{b}$ & $\underline{c}$ рекурсивно в $\underline{b}'$) $\Rightarrow \exists$ степень $\underline{d} (\underline{g} \leq \underline{d}$ & $\underline{d}$ рекурсивно перечислима в $\underline{b}$ & $\underline{a} \leq \underline{d}$ & $\underline{d}' = \underline{c}$).

Пусть C, A, G множества такие, что $d(C)$ рекурсивно перечислима в O' , G рекурсивно перечислимо, $d(G') < d(C)$, $d(A) \leq O'$ & $d(A) \leq d(G)$.

Известно, что $(d(C_0), d(C))$ рекурсивно перечислимы в O' & $d(C_0) < d(C) \Rightarrow \exists C_1 (d(C_1)$ рекурсивно перечислима в O' & $d(C_0) < d(C_1) < d(C)$ (1).

Пусть $C_1, C_2, \dots$ бесконечная последовательность множеств такая, что $\forall i (d(C_i)$ рекурсивно перечислима в O') & $d(G') < d(C_1) < d(C_2) < \dots < d(C)$ (из (1) следует что такая последовательность существует).

Тогда из теоремы Сакса следует, что $\exists D_1 (d(G) \leq d(D_1)$ & D_1 рекурсивно перечислимо & $d(D_1) = d(C_1)$ & $d(A) \leq d(D_1)$).

Для всякого $i \geq 2 \exists D_i (d(D_{i-1}) \leq d(D_i)$ & D_i рекурсивно перечислимо & $d(D_i) = d(C_i)$ & $d(A) \leq d(D_i)$).

Так как $d(G') \neq d(C_1) = d(D_1)$, то $d(G) \neq d(D_1)$.

Так как $\forall i \geq 2 d(D_{i-1}) \neq d(D_i)$, то $\forall i \geq 2 d(D_{i-1}) \neq d(D_i)$.

Таким образом получили, что $(C, G, A$ множества такие, что $d(C)$ рекурсивно перечислима в O' & G рекурсивно перечислимо & $d(G') < d(C)$ & $d(A) \leq O'$ & $d(A) \leq d(G) \Rightarrow$

$\exists$ бесконечная последовательность $D_1, D_2, \dots$ ($\forall (D_i$ рекурсивно перечислимо & $d(A) \leq d(D_i)$) & $d(G) < d(D_1) < d(D_2) < \dots$

& $d(G') < d(D_1) < d(D_2) < \dots < d(C)$). (2).

Доказываемое утверждение следует из (2) и следствия 1. 1. Заметим, что если C рекурсивно перечислимо в K и A рекурсивно перечислимо, то имеется эффективный переход от р. п. индекса C (относительно K) и р. п. индексов G, A к р. п. индексам множеств $D_1, D_2, \dots$.

Следствие 1.3. Существует такое множество B , что $d(B)$ минимальная степень и $L_2(F_0^B, F_0)$.

Доказательство. В (3) доказана следующая теорема. Пусть $c \geq O'$. Тогда существует минимальная степень b такая, что $b' = c$. Отсюда и, из теоремы 1 следует доказываемое утверждение.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского Государственного университета

Ա. Հ. ՄՈՎՍԻՅԱՆ

Ռեկյառիվիդացված կոլմոզորովյան բարդությունների ուղի հատկություններ

Կառուցված է ուկուրսիվ թվարկելի բազմությունների T -աստիճանների անվերջ խիստ աճող հաջորդականություն, որի ուսությունները խիստ կարգ են պահպանում և այդ հիման վրա կառուցված է այնպիսի ռեկյառիվիդացված ֆունկցիաների շղթա, որոնց նկատմամբ կոլմոզորովյան բարդությունները ադիտիվ հաստատունի ճշտությամբ խիստ նվազում են:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Н. Колмогоров, Проблемы передачи информации, т. 1, вып. 1 3—11 (1965).
² Г. Б. Маранджян, «Известия АН Арм. ССР», 4 вып. 1, 3—22 (1969). ³ Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычисляемость, изд. «Мир», М., 1972.
⁴ G. E. Sacks, Annals of mathematics Studies, v. 55 Princeton, N. J., 1963. ⁵ S. B. Cooper, The Journal of Symbolic Logic, vol. 38, 249—271, (1973). ⁶ М. И. Канович ДАН СССР т. 198, №2, 283—286 (1971).