ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIV 1977 2

УДК 517.512.7

МАТЕМАТИКА

Ф. Г. Арутюнян

Представление функций кратными рядами

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР А. А. Талаляном 30/VI 1976)

В статье излагаются результаты, которые в основном были сообщены на Всесоюзной конференции по метрической теории функций, прошедшей в Агверане (Ереван, 1975).

Пусть $S[a, b]$ — класс почти всюду конечных, измеримых функций на $[a, b]$, $\overline{S}[a, b]$, — класс измеримых функций, которые могут принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ на множествах положительной меры, $C[a, b]$ — пространство непрерывных функций, $M[a, b]$ — пространство ограниченных функций, $L^p[a, b]$ — пространство функций, интегрируемых со степенью p.

Д. Е. Меньшовым доказаны:

Теорема А ([1]) $\forall f\in S[-\pi, \pi]$ $\exists$ *тригонометрический ряд, который сходится к f почти всюду.*

Теорема Б ([2]) $\forall f \in S[-\pi, \pi]$, $\varepsilon>0$ $\exists \overline{f} \in M[-\pi, \pi]$ $(\mu\{t: \overline{f}(t) \neq f(t)\}<\varepsilon)$ *и тригонометрический ряд, который сходится к $\overline{f}$ по метрике $M[-\pi, \pi]$ (следовательно сходится и равномерно).*

Системы функций, которые обладают этими свойствами тригонометрической системы, назовем (А) (соответственно (Б)) системами. Если для некоторой системы выполняется утверждение теоремы А в классе $\overline{S}[a, b]$, то такую систему будем называть системой $(\overline{A})$. Для кратных рядов эти определения даются аналогичным образом.

Пусть: $\{n_k\}_1^\infty$ и $\{m_k\}_1^\infty$ — последовательности натуральных чисел $(n_k<m_k<n_{k+1},\ k\geq 1,\ \lim(m_k-n_k)=+\infty)$, $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — система функций $\{\cos jt, \sin jt\}$ $(n_k\leq j\leq m_k,\ k\geq 1)$, расположенных в произвольном порядке.

Справедливы:

Теорема 1. $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — *является* (А) — *системой, причем для заданной $f\in S[-\pi, \pi]$ сходящийся ряд может быть выбран так, чтобы почти всюду сходился и сопряженный ряд (в том же порядке $\{\varphi_k\}_1^\infty$).*

Теорема 2. $\{\varphi_k\}_1^\infty$ *—является* (Б) *системой, причем для заданной* $f\in S[-\pi, \pi]$ *и* $\varepsilon>0$ *сходящийся ряд может быть выбран так, чтобы равномерно сходился и сопряженный ряд (в том же порядке* $\{\varphi_k\}_1^\infty$).

В доказательствах теорем 1 и 2 используется следующее свойство системы $\{\varphi_k\}_1^\infty$.

Лемма 1. $\forall N, \varepsilon>0$ *и интервала* $\Delta\subseteq[-\pi, \pi]$ $\exists$ *полином* $P=\sum_{N+1}^{N_1} a_k\varphi_k$ *такой, что*

1) $|\mu\Delta|^{-1}\int\limits_{\Delta}|P(t)|dt>\omega$ (ω *—постоянная*)

2) $|P(t)|<\varepsilon$ $(|\bar{P}(t)|<\varepsilon)$, $t\in[-\pi, \pi]\setminus\Delta$ ($\bar{P}$ *—сопряженный к* p)

3) $\| U(P, t)\|_{M[-\pi,\pi]}\leq 1$ $(\| U(\bar{P}, t)\|_{M[-\pi,\pi]}\leq 1)$,

где $U(P, t)=\sup\limits_{r\leq l}|\sum_{r}^{l} a_k\varphi_k(t)|$.

Лемма 1 следует из следующего легко проверяемого свойства тригонометрической системы: Пусть $0<h\leq\pi$

$$\Phi_h(t)=\begin{cases}1-|t|\cdot h^{-1}, & |t|\leq h\\ 0, & h<|t|<\pi\\ \Phi_h(t)\text{—продолжается с периодом } 2\pi.\end{cases}$$

Справедливо неравенство

$$|2\pi|^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_h(a+t)\cos pte^{-ikt}dt\right|<\lambda$$

$\forall$ h, a и натурального p (λ — постоянная).

Отметим, что последнее неравенство позволяет, в формулировке теоремы А, задать порядок убывания коэффициентов, близкий к окончательному.

Системы функций, обладающие свойствами 1)-3) леммы 1 (не учитывая свойства полинома $\bar{P}$), были рассмотрены нами в работе ([3]) и были названы системами (χ) (здесь же будем называть системами (χ, $M[a, b]$) и было показано, что этим свойством, кроме тригонометрической, обладают так же системы Хаара и Уолша при всех перестановках, и все базисы $C[a, b]$. Там же было доказано, что системы (χ, $M[a, b]$) являются (А) системами. Добавим также, что если функции такой системы кусочно-непрерывные, то система будет обладать и свойством (Б). Повторяя рассуждения работы ([3]), можно показать, что кратная система, по произвольной системе (χ, $M[a,b]$), также является системой (А) и (Б) (в последнем случае предполагается, что функции кусочно-непрерывны). Результаты такого рода можно получить и для других систем, обладающих свойствами, близким к (χ, $M[a, b]$). Точнее, скажем, система функций $\{\varphi_k\}_1^\infty$, определенная на $[a, b]$, обладает свойством (χ, $L^p[a, b]$), если $\forall N$, $\varepsilon>0$ и интервала $\Delta\subset[a, b]$ $\exists$ $\psi(\|\psi\|_{M[a,b]}\leq 1$, $\psi(t)=0$, $t\notin\Delta)$ и полином

$P=\sum_{N+1}^{N+j} a_k \varphi_k$ такие, что

1′) $\| P-\psi \|_{L_1[a,b]}<\varepsilon$, $|\mu \Delta|^{-1} \int_{\Delta} |\psi(t)|\, dt>\omega$ (ω — постоянная),

2′) $\| U(P, t) \|^p_{L^p[a,b]} \leqslant \gamma \| \psi \|^p_{L^p[a,b]}$ (γ—постоянная)

Справедливы:

Теорема 3. *Пусть* $\{\varphi_k\}_1^\infty$ —(χ, $M[a, b]$) *система* (*или* (χ, $L^p[a, b]$), $p>2$). *Тогда n-кратная система* $\{\varphi_{k_1}(t_1)\cdot\cdot\cdot\varphi_{k_n}(t_n)\}$ ($k_j\geqslant 1$, $1\leqslant j\leqslant n$) *является* (А) *системой* (*суммируемость n-кратного ряда здесь осуществляется некоторым методом D, из которого в частности следует суммируемость прямоугольным, сферическим и треугольным частичными суммами одновременно*).

Теорема 4. *Пусть* $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — (χ, $M[a, b]$) *система, которая состоит из кусочно-непрерывных функций. Тогда n-кратная система* $\{\varphi_{k_1}(t_1)\cdot\cdot\cdot\varphi_{k_n}(t_n)\}$ *является* (Б) *системой* (*суммируемость понимается в смысле D*).

Применяя метод, указанный А. М. Олевским [4], можно (χ, $M[a, b]$) и (χ, $L^p[a, b]$) системы переставить так, чтобы кратная система (по переставленной системе) стала системой (А). С другой стороны, из одного неравенства Гарсия [5] следует, что любой безусловный базис пространства $L^p[a, b]$ после некоторой перестановки становится подобным (χ, $L^p[a, b]$) системе. Справедлива:

Теорема 5. *Пусть* $\{\varphi_k\}_1^\infty$ —(χ, $M[a, b]$), (χ, $L^p[a, b]$) $p>2$ *система, либо безусловный базис* $L^p[a, b]$, $p\geqslant 2$. *Тогда систему* $\{\varphi_k\}_1^\infty$, *можно переставить так, чтобы n-кратная система, по переставленной системе, стала системой* ($\overline{\text{А}}$) (*суммируемость понимается в смысле D*).

В одномерном случае, когда $\{\varphi_k\}_1^\infty$—тригонометрическая система, система Уолша, АОНС система ограниченная в совокупности—этот факт был отмечен в работах, соответственно [6-8].

Заметим, что примененный метод, в доказательствах теорем 1-5, позволяет построить, соответствующий данной теореме, один универсальный ряд такой, чтобы каждый выбранный ряд, указанный в этой теореме, являлся частичным подрядом этого универсального ряда. Заметим также, что теоремы 1, 3 и 5 остаются в силе и при более слабых требованиях, чем условия (X, $M[a, b]$) и (X, $L^p[a, b]$). Например, выполнение свойств 1) —3) и 1′)—2′) достаточно требовать не на всем отрезке $[a, b]$, а по некоторой системе расширяющихся множеств в $[a, b]$. И наконец, отметим, что в двумерном случае, когда $\{\varphi_k\}_1^\infty$ совпадает с тригонометрической системой, теоремы 3 и 4 в более слабом виде сформулированы в [9-11].

Приведем одну лемму, при помощи которой осуществляются доказательства теорем 1—5.*)

---

* Доказательство этой леммы по существу содержится в нашей работе [3].

Пусть последовательность кусочно-постоянных функций $\{\psi_k(t)\}_1^\infty$ $t \in [0, 1]$ обладает свойствами:

1") $|\psi_k(t)| \leq 1$, $\forall k \geq 1$ и $t \in [0, 1]$,

2") ${}_0\int^1 \psi_k(t)\, dt = 0$,

3") если Δ_k минимальный интервал, содержащий множество $\{t : \psi_k(t) \neq 0\}$, то $\psi_j(t)$ постоянная на Δ_k $\forall j < k$.

4") $\lim \mu \Delta_k = 0$.

Лемма 2. *Пусть* $\sum_1^\infty |f_k(t) - \psi_k(t)| < +\infty$ *почти всюду на* $[0, 1]$, $\sum_1^\infty |f_k(t)|^2 = +\infty$ *почти всюду на* $[0, 1]$, $\lim f_k(t) = 0$ *почти всюду на* $[0, 1]$. *Тогда ряд* $\sum_1^\infty f_k(t)$ *обладает тем свойством, что* $\forall f \in S[0, 1]$ *существует последовательность чисел* $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$ ($\varepsilon_k = 1$ *или* 0) *такой, что* $\sum_1^\infty \varepsilon_k f_k(t) = f(t)$ *почти всюду на* $[0, 1]$.

В конце сформулируем одну лемму, которая представляет самостоятельный интерес.

Лемма 3. *Пусть* $\{\varphi_k\}_1^\infty - (\chi, M[a, b])$ *система, которая состоит из кусочно-непрерывных функций, тогда* $\forall N$, *интервала* $\Delta \leq [a, b]$ *и* $\varepsilon > 0$ $\exists$ *полином* $P = \sum_{N+1}^{N_1} Q_k \varphi_k$ *такой, что*

$$\| |P| - \psi_\Delta \|_{M[a, b]} + \| U(P) - \psi_\Delta \|_{M[a, b]} < \varepsilon,$$

где ψ_Δ — *характеристическая функция интервала* Δ.

Институт математики Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Չափելի ֆունկցիաների ներկայացումը բազմապատիկ շարքերով

Աշխատանքում մանրամասնորեն բերվում են հետևյալ երկու թեորեմները։

Թեորեմ 1. $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$-ում որոշված ամեն մի f չափելի, վերջավոր ֆունկցիայի համար գոյություն ունի կրկնակի եռանկյունաչափական շարք, որը համարյա ամենուրեք զուգամիտում է f ֆունկցիային։

Թեորեմ 2. $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$-ում որոշված ամեն մի f չափելի, վերջավոր ֆունկցիայի և $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի f, $\mu\{x : f(x) \neq f(x)\} < \varepsilon$, անընդհատ ֆունկցիա, որի Ֆուրյեի շարքը (ըստ կրկնակի եռանկյունաչափական սիստեմի) հավասարաչափ զուգամիտում է։

Երկու թեորեմներում էլ զուգամիտումը հասկացվում է մի ընդհանրացված մեթոդով, որից մասնավորապես ստացվում են բոլոր կլասիկ գումարման մեթոդները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Д. Е. Меньшов*. Матем. сб., 9(51), 667—692 (1941). [2] *Д. Е. Меньшов*. Матем. Сб., 11 (53) 67—96 (1942). [3] *Ф. Г. Арутюнян*. Матем. сб., 90 (132) : 4, 483—520 (1973). [4] *А. М. Олевский*. Матем. сб., 77, №2 251—258 (1968). [5] *A. Garsia*, Topics in almost every where convergence, Chicago, 96—97 (1970). [6] *Ф. Г. Арутюнян*. ДАН Арм ССР, т. LVII, № 2 (1973). [7] *Р. И. Овсепян*. ДАН Арм ССР, т. LVII, № 1 (1973). [8] *И. Б. Погосян*. Матем. сб., 98 (140) : 1(9), 102—112 (1975). [9] *А. Г. Джваршейшвили*, Сооб. АН Груз. ССР, 14 : 1 11—15 (1953). [10] *С. Б. Топурия*. ДАН, 195 . 5, 1046—1049 (1970). [11] *Г. М. Черномашенцев*, ДАН, 176—2, 227—278 (1967).