ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIV 1977 2

УДК 5.19.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян

Асимптотическое изучение систем $\vec{M}_r/\vec{G}_r/1$ при «быстром» обслуживании

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 24/IV 1976)

Настоящее сообщение является продолжением ([1]). Рассматривается класс систем обслуживания типа $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1$ без прерывания уже начатого обслуживания, у которого вектор $\zeta_n = (\xi_1^{(n)}, \cdots, \xi_r^{(n)}; i)$, где $\xi_j^{(n)}$ — число вызовов j-го потока (j-вызовов), оставшихся в системе после окончания обслуживания n-го вызова, являющегося i-вызовом, образуют простую цепь Маркова. Длительность обслуживания i-вызовов есть случайная величина (сл. в.) с функцией распределения $B_i(t)$, $B_i(0)=0$, а интенсивность потока i-вызовов равна $a_i>0$ $(i=\overline{1,r})$. Длительности обслуживания суть независимые в совокупности сл. в. и не зависят от процесса поступления. В момент $t=0$ система свободна от вызовов.

Пусть независимо от функционирования системы наступают „катастрофы", поток которых пуассоновский с параметром $s>0$. Каждый i-вызов независимо от остальных с вероятностью x_i $(0<x_i<1)$ окрашиваем в красный цвет и с вероятностью $1-x_i$ — в синий.

1°. Пусть $g^*_{in}(\vec{k}; t)$ — вероятность того, что в момент окончания обслуживания n-го вызова впервые наблюдался вектор $(\vec{k}; i)$ (т. е. обслужен i-вызов; после него осталась очередь типа $\vec{k}=(k_1, \cdots, k_r)$); а время, протекшее до окончания обслуживания этого i-вызова, не превосходит t. Иными словами, $g^*_{in}(\vec{k}; t)$ — вероятность первого достижения состояния $(\vec{k}; i)$ из состояния $(\vec{0}; \cdot)$ $(\vec{0}=(0, \cdots, 0))$ через n шагов за время, не превосходящее t.

Обозначим через $p^*_{in}(\vec{k}; t)$ вероятность перехода из состояния $(\vec{0}; \cdot)$ в состояние $(\vec{k}; i)$ за n шагов в течение времени, не превосходящего t.

Если $v_{ln}^*(\vec{k}; t)$ — условная вероятность перехода за n шагов в состояние $(\vec{k}; l)$ в течение времени, не превосходящего t, при условии выхода из состояния $(\vec{k}; i)$ и

$$g_{ln}(\vec{k}; s)=\int_0^\infty e^{-st}d_t g_{ln}^*(\vec{k}; t), \quad v_{ln}(\vec{k}; s)=\int_0^\infty e^{-st}d_t v_{ln}^*(\vec{k}; t), \tag{1}$$

то нетрудно видеть, что $(n>1;\ i=\overline{1, r};\ k_l\geqslant 0;\quad s\geqslant 0)$

$$p_{i1}(\vec{k}; s)=g_{i1}(\vec{k}; s), \quad p_{ln}(\vec{k}; s)=g_{ln}(\vec{k}; s)+\sum_{m=1}^{n-1} g_{lm}(\vec{k}; s)v_{ln-m}(\vec{k}; s). \tag{2}$$

Если η_l — случайная длительность обслуживания l-вызова, то пусть сл. в. η с вероятностью a_l равна сл. в. η_l. Здесь и ниже без ограничения общности полагаем $a_1+\cdot\cdot\cdot+a_r=1$. Пусть выполнены следующие эквивалентные условия $(\beta_l(s)=\int_0^\infty e^{-st}dB_l(t))$

$$\rho(s)=\sum_{l=1}^{r} a_l\beta_l(s)\to 1 \quad \text{и} \quad \eta\xrightarrow{P}0. \tag{3}$$

При переходе из состояния $(\vec{k}; i)$ за n шагов в состояние $(\vec{k}; l)$ для того, чтобы пройти через состояние $(\vec{0}; \cdot)$, необходимо, чтобы $n>|\vec{k}|=k_1+\cdot\cdot\cdot+k_r$.

Пусть A-событие, заключающееся в отсутствии „катастроф" за n шагов, переходе за эти n шагов в состояние $(\vec{k}; i)$ при условии выхода из состояния $(\vec{k}; l)$. Очевидно: $v_{ln}(\vec{k}; s)=P(A)$.

Допустим: $B=\{$при условии выхода из состояния $(\vec{k}; i)$ в течение n шагов нет попадания в состояние $(\vec{0}; \cdot)\}$. Положим: $\bar{v}_{ln}(\vec{k}; s)= =P(AB)$.

При $x\to 0$ будем писать $y=0^*(x)$, если либо $y=0(x)$, либо $y=0(x)$.

Лемма 1. *Если* $\eta\xrightarrow{P}0$, *то* $\bar{v}_{ln}(\vec{k}; s)=0^*(\rho_n(s))$, *где обозначено* $(s\geqslant 0)$

$$\rho_n(s)=\sum_{j=1}^{r} a_j\beta_{jn}(s), \quad \beta_{jn}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\cdot\frac{x^n}{n!}\,dB_j(x).$$

Доказательство. Пусть вначале $a_l\beta_{ln}(s)=0(\rho_n(s))$. Тогда по теореме работы [1] при любых l, $m\geqslant 1$; $\vec{n}$ $(|\vec{n}|=n)$

$$p_{il}(\vec{n}; s)=0(p_{im}(\vec{n}; s)). \tag{4}$$

Период занятости (п. з.), за который обслужено не менее n вызовов, при условии, что он начался с состояния $(\vec{k}; l)$, обозначим через $\pi_{>n}(\vec{k}; l)$.

События $\overline{A}_j^m(s)$, $\overline{B}_{lj}$ определяем внутри $\pi_{>n}(\vec{k};\ l)$ ($j=\overline{1,n}$; $l=\overline{1,r}$; $m\geq 0$). $\overline{A}_j^m(s)$-событие, заключающееся в том, что j-ым обслуживается вызов, за длительность обслуживания которого поступило m штук вызовов и не наступали „катастрофы". $\overline{B}_{lj}$—событие, заключающееся в том, что j-ым обслуживается l-вызов. Имеем

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}(\overline{B}_{l_j j}\cdot\overline{A}_j^{m_j}(s)\right\}=\prod_{l=1}^{n}\beta_{l_l m_l}(s)P\left\{B_{l_l l}/\bigcap_{j=1}^{l-1}(\overline{B}_{l_j j}\overline{A}_j^{m_j}(s)\right\}. \quad (5)$$

где $P(B/C)$—условная вероятность события B при условии осуществления события C.

Пусть k-ый, обслуженный за $\pi_{>n}(\vec{k};\ l)$ вызов, является l_k-вызовом ($k=\overline{1,n}$; $l_k=\overline{1,r}$). Положим: $\vec{m}=(m_1,\cdot\cdot\cdot,m_n)$, $\vec{l}=l_1,\cdot\cdot\cdot,l_n$), $|\vec{m}|=n$.

Размерность вектора $\vec{i}$ равна n, поскольку для попадания из состояния $(\vec{k};l)$ в состояние $(\vec{k};i)$ за n шагов необходимо поступление в течение этих n шагов ровно n вызовов. Пара векторов $(\vec{m};\ \vec{i})$ однозначно задает некоторую последовательность обслуживаний n вызовов с указанием числа поступлений вызовов за эти n обслуживаний, т. е. задает некоторую *траекторию*. Если внутри каждой траектории различать типы поступающих вызовов и их порядок поступления, то траектория распадается на подтраектории. Обозначим через $\overline{P}(\vec{m};\ \vec{i})$ вероятность осуществления траектории $(\vec{m};\vec{i})$. Исходя из (5), получаем

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}\overline{B}_{l_j j}\overline{A}_j^{m_j}(s)\right\}=\left(\prod_{l=1}^{n}\beta_{l_l m_l}(s)\right)\overline{P}(\vec{m};\ \vec{i}). \quad (6)$$

Легко видеть, что

$$\overline{P}(\vec{m};\ \vec{i})=P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}\overline{A}_j^{m_j}(0)\right\}\left(\prod_{l=1}^{n}a_{l_l}\right)\overline{C}(\vec{m};\ \vec{i}), \quad (7)$$

где величина $\overline{C}(\vec{m};\vec{l})$ есть число возможных подтраекторий траектории $(\vec{m};\vec{i})$.

$\overline{C}(\vec{m};\vec{l})$ ограничено сверху, например, числом $n!$. Тогда из (6)

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}(\overline{B}_{l_j j}\overline{A}_j^{m_j}(s)\right\}=a_{l_1}\beta_{l_1 m_1}(s)\cdot\cdot\cdot a_{l_n}\beta_{l_n m_n}(s)\,\overline{D}(\vec{m},\ \vec{i}) \quad (8)$$

где $0<\overline{D}(\vec{m};\ \vec{i})<n!$.

Перейдем к вычислению асимптотики $\pi_{>n}(\vec{k};\ s)$

$$\bar{v}_{in}(\vec{k};\ s)=\sum P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}(B_{i_j}\bar{A}_j^{m_j}(s))\right\}=$$

$$\sum a_{i_1}\beta_{i_1m_1}(s)\cdot\cdot\cdot a_{i_{n-1}}\beta_{i_{n-1}}(s)a_i\beta_{im_n}(s)\bar{D}(\vec{m};\ \vec{i}), \tag{9}$$

причем в сумме правой стороны (9) содержатся слагаемые

$$\sum_{i_1=1}^{r}\cdot\cdot\cdot\sum_{i_{n-1}=1}^{r}a_{i_1}\beta_{i_1n}(s)a_{i_2}\beta_{i_20}(s)\cdot\cdot\cdot a_{i_{n-1}}\beta_{i_{n-1}0}(s)a_i\beta_{i0}(s)\times$$

$$\times P\left\{\bar{A}_1^n(0)\bigcap_{j=2}^{n}\bar{A}_j^0(0)\right\}\bar{C}(n,\ 0,\cdot\cdot\cdot,\ 0;\ \vec{i}), \tag{10}$$

которые и заключают в себе главный член асимптотики $\bar{v}_{in}(\vec{k};s)$ при $\tau_i\xrightarrow{p}0$, что следует из леммы работы (1). При этом получаем $\bar{v}_{in}(\vec{k};\ s)=0(\rho_n(s))$. Если же выполнено $a_i\beta_{i|\vec{n}|}(s)=0\ (\rho_{|\vec{n}|}(s)),\ |\vec{n}|=n$, то, проглядев заново доказательство, заключаем, что $\bar{v}_{in}(\vec{k};s)=0(\rho_n(s))$, ч. и. т. д.

Введем в рассмотрение событие: C {при условии выхода из состояния $(\vec{k};\ i)$ в течение n шагов наблюдалось попадание в состояние $(\vec{0},\cdot)$}. Положим: $v_{in}(\vec{k};\ s)=P(AC)$.

Лемма 2. *Если* $\tau\xrightarrow{p}0$, *то* $\bar{v}_{in}(\vec{k};\ s)=O^*(p_{in}(\vec{k};\ s))$.

Доказательство. Пусть $C_j=$ {при условии выхода из состояния $(\vec{k};\ i)$ за j шагов не было „катастроф" и через эти j шагов наблюдалось первое попадание в состояние $(\vec{0};\cdot)$}. Положим: $d_{in}(\vec{k};s)=P(C_n)$.

Формула полной вероятности позволяет записать

$$\bar{v}_{in}(\vec{k};s)=\sum_{m=|\vec{k}|}^{n-1}d_{im}(\vec{k};s)p_{i,n-m}(\vec{k};s). \tag{11}$$

Так как по теореме работы (1) при $\eta\xrightarrow{p}0$

$$p_{il}(\vec{k},s)=\begin{cases}O(p_{im}(\vec{k};s)), & \text{если } 1<l\le m,\\ O^*(p_{im}(\vec{k},s)), & \text{если } 1=l<m,\end{cases}$$

то

$$\bar{v}_{in}(\vec{k};\ s)=\left(\sum_{m=|\vec{k}|}^{n-1}d_{im}(\vec{k};s)\right)O^*(p_{in}(\vec{k};\ s)). \tag{12}$$

Поскольку первый сомножитель правой части (12) конечен, то из (12) находим $\bar{v}_{in}(\vec{k};s)=O^*(p_{in}(\vec{k};s))$, ч. и т. д.

Используя леммы 1,2 и равенство $v_{in}(\vec{k};s)=\bar{v}_{in}(\vec{k};s)+\bar{\bar{v}}_{in}(\vec{k};s)$ находим

$$v_{in}(\vec{k};s)=O^*(\rho_{\min(n,|\vec{k}|)}(s)). \tag{13}$$

Теперь с помощью формул (2),(13) методом математической индукции доказывается

Теорема 1. $g_{in}(\vec{k};s)=p_{in}(\vec{k};s)+o(p_{in}(\vec{k};s)),\quad \tau_i\xrightarrow{P}0.$

2°. Допустим в рассматриваемых системах длина очереди из i — вызовов не может превосходить $n_i\geqslant 0$, т. е. при наличии в очереди n_i i — вызовов новый поступивший i — вызов теряется.

Обозначим через τ_i время до первой потери i — вызова, а через q^i вероятность потери i — вызова раньше остальных на одном п. з. П. з., на котором произошла первая потеря вызова, называем последним.

Если q^i_j — вероятность потери i — вызова раньше остальных на одном п. з. и наличия в момент потери ровно j штук обслуженных за последний п. з. вызовов, то $q^i=q^i_0+q^i_1+\cdots$.

Будем изучать методом работы [2] асимптотику величины τ_i при $\tau_i\xrightarrow{P}0$. Из теоремы А. Д. Соловьева [3] вытекает в нашем случае

Следствие. $\lim\limits_{\bar{\rho}_1\to 0}P\{q^i\tau_i>x\}=e^{-x},\quad x\geqslant 0,$

где $\bar{\rho}_n=a_1\beta_{1n}+\ldots+a_r\beta_{rn},\ \beta_{in}=\int\limits_0^\infty t^n dB_i(t)\quad (i=\overline{1,r};\ n\geqslant 1).$

Положим

$$b_{ic}=\int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{x^c}{c!}[1-B_i(x)]dx,\ T(\vec{k};\vec{a})=\frac{(|\vec{k}|)!}{k_1!\ldots k_r!}a_1^{k_1}\ldots a_r^{k_r}.$$

Нетрудно вывести формулу, определяющую q^i_0

$$q^i_0=\sum_{\substack{0<p_m\leqslant n_m\\ m=\overline{1,r},m\neq i}}T(\vec{p};\vec{a})a_i\sum_{j=1}^r a_j b_{j|\vec{p}|}\quad (p_i=n_i).$$

Так как (см. [1]) $(k\geqslant 3)a_j b_{jn_i+1}\geqslant a_j b_{jn_i+2}\geqslant\ldots\geqslant a_j b_{jn_i+k}\geqslant\ldots\geqslant 0,$ то положив

$$\bar{q}^i_0=a_i^{n_i+1}\sum_{j=1}^r a_j b_{jn_i},$$

получаем

$$q^i_0-\bar{q}^i_0\leqslant a_i\sum_{j=1}^r a_j b_{jn_i+1}\cdot S(\vec{n};\vec{a}), \tag{14}$$

где

$$S(\vec{n};\vec{a})=\sum_{\substack{0\leqslant p_m\leqslant n_m\\ m=\overline{1,r},m\neq i\\ |\vec{p}|>0}}T(\vec{p};\vec{a})\quad (p_i=n_i). \tag{15}$$

Введем в рассмотрение величину l_i

$$l_i = [n_i!]^{-1} a_i^{n_i+1} \sum_{j=1}^{r} a_j \int_{t=0}^{\infty} [1-B_j(t)] t^{n_i} dt = [(n_i+1)!]^{-1} a_i^{n_i+1} \sum_{j=1}^{r} a_j \beta^{j n_i+1}. \quad (16)$$

Лемма 3. *Если* $\bar{\rho}_{n_i+2}/\bar{\rho}_{n_i+1} \to 0$, *то* $\bar{q}_0^i \sim l_i$.

Доказательство. Очевидно, что $\bar{q}_0^i \leqslant l_i$. Далее, по первому равенству в (16)

$$0 \leqslant (l_i)^{-1}(l_i - \bar{q}_0^i) \leqslant [n_i! \cdot l_i]^{-1} \cdot a_i^{n_i+1} \sum_{j=1}^{r} a_j \int_{t=0}^{\infty} [[1-B_j(t)] t^{n_i} [1-e^{-t}] dt \leqslant$$

$$\leqslant [n_i! \cdot (n_i+2)]^{-1} \cdot a_i^{n_i+1} (\bar{\rho}_{n_i+2}/\bar{\rho}_{n_i+1}) \to 0.$$

Лемма 4. *Если* $\bar{\rho}_{n_i+2}/\bar{\rho}_{n_i+1} \to 0$, то $q_0^i \sim l_i$.

Доказательство. Из (15) следует, что величина $S(\vec{n}; \vec{a})$ конечна. В силу (14)

$$(\bar{q}_0^i)^{-1}(q_0^i - \bar{q}_0^i) \sim (l_i)^{-1}(q_0^i - \bar{q}_0^i) \leqslant$$

$$\leqslant \bar{\rho}_{n_i+1}^{-1} a_i S(\vec{n}; \vec{a}) \left(\sum_{j=1}^{r} a_j b^{j n_i+1} \right) \leqslant \frac{a_i S(\vec{n}; \vec{a})}{n_i+2} \frac{\bar{\rho}^{n_i+2}}{\bar{\rho}_{n_i+1}} \to 0, \quad (17)$$

откуда $q_0^i \sim \bar{q}_0^i$ и по лемме 3 $q_0^i \sim l_i$, ч. и т. д.

Лемма 5. *Если* $\rho_{n_i+2}/\rho_{n_i+1} \to 0$, *то* $(q_0^i)^{-1} \sum_{k \geqslant 1} q_k^i \to 0$.

Доказательство. Пусть ζ_m — время обслуживания m-го по счету обслуженного за п. з. вызова, x_m^i — момент поступления m-го i-вызова внутри п. з. (если вызов, с которого начался п. з., есть i-вызов, то он не учитывается при нумерации x_m^i).

Допустим k-ым ($k > 1$) поступил j-вызов. Он должен был поступить в течение обслуживания первых $k-1$ обслуженных вызовов. Вероятность того, что k-ым обслуживается k_j-вызов ($k = \overline{1, n+1}$), за длительность обслуживания первых $n+1$ вызовов поступило не менее $n_i + 2$ i-вызовов, вследствие чего произошла потеря i-вызова, не превосходит интеграла

$$\int_0^{\infty} P\{x_{n_i+2}^i < t\} d[a_{1_j} B_{1_j}(t) * \ldots * a_{(n+1)_j} B_{(n+1)_j}(t)],$$

где $*$ — знак свертки. Следовательно,

$$P\{x_{n_i+2}^i < \zeta_1 + \cdots + \zeta_{n_i+1}\} \leqslant \int_0^{\infty} P\{x_{n_i+2}^i < t\} d\left[\sum_{j=1}^{r} a_j B_j(t) \right]^{n}_{*}. \quad (18)$$

С другой стороны,

$$P\{x_{n_i+2}^i < \zeta_1 + \cdots + \zeta_{n_i+1}\} \geqslant q_1^i + q_2^i + \cdots, \quad (19)$$

Правая сторона (18) оценена сверху в лемме 2 работы [3], где следует положить: $n=n_l+1$; $G(t)=\sum_{j=1}^{r} a_j B_j(t)$; $t_k=a_l$ $(k=\overline{1, n_l+1})$.

Из формул (17)–(19) вытекает $(q_0^l)^{-1}\sum_{k\geq 1} q_k^l\to 0$, ч. и т. д.

Теорема 2. $\lim\limits_{\bar\rho_{n_l+2}/\bar\rho_{n_l+1}\to 0} P\{I_l\tau_l>x\}=e^{-x},\quad x\geq 0.$

Доказательство. Так как $\bar\rho_1\leq\bar\rho_{n_l+2}/\bar\rho_{n_l+1}\to 0$, то $\bar\rho_1\to 0$ и имеет место следствие. Из доказанных лемм 3, 4, 5 следует, что при $\bar\rho_{n_l+2}/\bar\rho_{n_l+1}\to 0$ имеет место $q^l\sim I_l$, ч. и т. д.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

$\vec{M}_r|\vec{G}_r|l$ տիպի սիստեմների ասիմպտոտիկ հետազոտում «արագ» սպասարկման դեպքում

Դիտարկվում է $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1$ տիպի զանգվածային սպասարկման սիստեմների դասը։ Հերթի երկարության վեկտորները դիտարկվում են պահանջների սպասարկման ավարտի մոմենտներին։ Այդ պահանջների տիպի համարները կցված են հերթի երկարության վեկտորներին և կազմում են նոր վեկտորներ։ Ենթադրվում է, որ այդ վեկտորները կազմում են հասարակ մարկովյան շղթա։

Հերթի երկարության բաշխման ասիմպտոտիկայի հիման վրա «արագ» սպասարկման դեպքում $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ սիստեմների համար հաջողվել է գտնել մինչև $\vec{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ տիպի $(k_i\geq 0;\ i=\overline{1,r})$ հերթին առաջին անգամ հասնելու ժամանակի մոմենտի ասիմպտոտիկ բաշխումը։

Պահանջի առաջին կորստի նորմավորված ժամանակի մոմենտի համար $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\bar{n}$ տիպի սիստեմներում «արագ» սպասարկման դեպքում ապացուցված է մի սահմանային թեորեմ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. А. Даниелян.* Системы $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ в случае «быстрого» обслуживания. ДАН Арм ССР, т. LXIV, № 1 (1977). [2] *Д. Б. Гнеденко, А. Д. Соловьев.* «Известия АН СССР», техническая кибернетика, № 6, 1974. [3] *А. Д. Соловьев.* Основы математической теории надежности, Знание, М., 1975.