ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIV 1977 1

УДК 621.391.2

РАДИОФИЗИКА

Академик АН Армянской ССР Э. Г. Мирзабекян, Л. П. Мурза

Некогерентная связь с дискретной модуляцией шумоподобных сигналов по поляризации

(Представлено 23/VII 1976)

Рассмотрение шумоподобных сигналов в связи и локации обусловлено тем обстоятельством, что большинство генераторов СВЧ, микроволнового и оптического диапазона излучения создает случайные поля с достаточно малым интервалом когерентности ([1]). Математической моделью электрического поля на входе приемника является двумерное комплексно - гауссовское случайное поле, стационарное и имеющее нулевой вектор среднего. При этом значения напряженности поля, разделенные интервалом времени (или пространственным интервалом), превышающем интервал (радиус) когерентности, практически независимы. Их совместное распределение зависит лишь от матрицы поляризации излучения K или от совокупности параметров Стокса $\sigma^a = \mathrm{tr}\, K\Phi_a$, $a=\overline{0,3}$, где $\{\Phi_a\}_0^3$—полная ортогональная система матриц Паули ([2-4]).

Параметры Стокса образуют четырехвектор $\vec{\sigma}=\sigma^0\{1, \vec{\pi}\}$, где $\sigma^0=\mathrm{tr}K$ —интенсивность излучения, $\vec{\pi}$—трехмерный евклидов вектор со значениями в единичном шаре (Пуанкаре). Полностью поляризованному (ПП) полю шумоподобного сигнала соответствует изотропный четырехвектор Стокса $|\vec{s}|^2=0$ с единичным вектором поляризации $|\vec{\pi}_s|=1$.

При передаче ПП сигналов с дискретной поляризационной модуляцией значениям символа m из передаваемого алфавита $m=\overline{0, M-1}$ соответствуют поля сигналов одинаковой интенсивности с различными векторами поляризации $\vec{\pi}_s^{(m)}$. Задача декодирования состоит в оценке номера m передаваемого сигнала по наблюдениям смеси сигнала с гауссовским шумом в канале связи. Структура некогерентного приемника не зависит от детальной картины спектров сигнала и шума. Синтез схемы оптимального декодирования (приема) особенно важен при весьма низких отношениях сигнал/шум по интенсивности, имеющих место, например, в задачах космической связи*.

Независимая выборка из одинаково распределенных значений напряженности поля $\vec{z}_n$, $n=\overline{1, N}$ при гипотезах H_m описывается плотностью распределения вида ([5]).

$$L[(\vec{z}_n)_1^N/H_m] = \prod_{n=1}^{N} \pi^{-2} \det Q_m \exp(-\vec{z}_n^{*} Q_m \vec{z}_n), \quad m=\overline{0, M-1},$$

$$Q_m^{-1} = K_m = E[\vec{z}_n \vec{z}_n^{*}/H_m], \quad E[\vec{z}_n \vec{z}_\nu'/H_m] = 0, \quad n, \nu = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где $\vec{z}_n^{*}$ — эрмитово сопряженный, $\vec{z}_n'$ — транспонированный векторы. С помощью Стокс-векторов (СВ) эта плотность может быть записана в эквивалентной форме ([3,4])

$$L[(\vec{z}_n)_1^N/H_m] = g(\vec{\xi}/\vec{\sigma}_m) = \left\{ \frac{2}{\pi|\vec{\sigma}_m|} \exp\left[-\frac{(\vec{\xi}, \vec{\sigma}_m)}{|\vec{\sigma}_m|^2} \right] \right\}^{2N},$$

$$\vec{\xi} = \xi^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}, \quad \xi^{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \vec{z}_n^{*} \Phi_{\alpha} \vec{z}_n, \quad \alpha = \overline{0, 3}. \tag{2}$$

Здесь $\{\vec{e}_{\alpha}\}_0^3$ — ортогональный базис в пространстве СВ, $\vec{\xi}$ — выборочный СВ, контравариантные компоненты ξ^{α} которого выражаются через матрицы Паули Φ_{α}. Нетрудно показать, что $\vec{\xi}$ является несмещенной и эффективной оценкой $\vec{\sigma}$ при соответствующей гипотезе ([6,7]). Поэтому, если СВ принимаемого поля, соответствующие M сигналам, заранее неизвестны, то их можно предварительно оценить с помощью классифицирующих (обучающих) выборок ([8]). Декодирующее устройство (приемник) принимает гипотезу $\hat{H}$, соответствующую минимуму вероятности ошибки

$$\min_{k=\overline{0, M-1}} P(\varepsilon/H_k) = 1 - \max_{k=\overline{0, M-1}} P(H_k/(\vec{z}_n)_1^N) \tag{3}$$

т. е. максимуму апостериорной вероятности ([6,7])

$$\hat{H} = H_m \Longleftrightarrow P(H_m/(\vec{z}_n)_1^N) \geq P(H_k/(\vec{z}_n)_1^N), \quad \forall k \neq m$$

По формуле Байеса с учетом вида плотности (2) последнее неравенство эквивалентно выбору минимальной из достаточных статистик вида:

$$\hat{H} = H_m \Longleftrightarrow y_m \leq y_k, \quad \forall k \neq m, \quad y_k \equiv \frac{(\vec{\xi}, \vec{\sigma}_k)}{|\vec{\sigma}_k|^2} + \ln|\vec{\sigma}_k| - \frac{1}{2N} \ln P_k. \tag{4}$$

---

* Поляризационная модуляция может использоваться при связи через атмосферу Земли, так как последняя не вносит существенных искажений в значение вектора поляризации $\vec{\sigma}_i$.

Полученный алгоритм описывает структуру приемника: вначале по выборке образуется СВ $\bar{\xi}$, а затем его значение подается на вход M каналов, в которых вырабатываются статистики $|y_m|$. Логическое устройство приемника выбирает из них наименьшую, при этом соответствующий номер канала принимается в качестве номера переданного сигнала.

Алгоритм (4) упрощается при условии, когда одинаковы априорные вероятности P_k передачи сигналов, а также длины СВ $|\vec{\sigma}_k|$

$$\hat{H} = H_m \Longleftrightarrow x_m \leq x_k, \quad \forall k \neq m, \quad x_k \equiv (\vec{\xi}_H, \vec{e}_k)$$
$$\vec{\xi}_H = \vec{\xi}/|\vec{\sigma}|, \quad \vec{e}_k = \vec{\sigma}_k/|\vec{\sigma}|. \tag{5}$$

Равенство длин СВ имеет место, например, при приеме ПП сигналов одинаковой интенсивности на фоне независимого и аддитивного неполяризованного шума

$$\vec{\sigma}_k = \vec{s}_k + \vec{n}, \quad |\vec{s}_k| = 0, \quad k = 0, \overline{M-1}$$
$$\vec{s}_k = s^0(1, \vec{\pi}_s^{(k)}), \quad \vec{n} = n^0(1, 0) \tag{6}$$

Отсюда, используя определения метрических свойств СВ ([3]), получаем

$$|\vec{\sigma}_k|^2 = 2(\vec{s}_k, \vec{n}) + |\vec{n}|^2 = (n^0)^2(1 + 2\lambda), \quad \lambda = s^0/n^0,$$

$$\frac{(\vec{\sigma}_m, \vec{\sigma}_k)}{|\vec{\sigma}_m|\,|\vec{\sigma}_k|} = \operatorname{ch}\theta^{(m,k)} = \frac{(1+\lambda)^2 - \lambda^2 \vec{\pi}_s^{(m)} \vec{\pi}_s^{(k)}}{(1+\lambda)^2 - \lambda^2}, \qquad \vec{\pi}_s^{(m)} \vec{\pi}_s^{(k)} = \cos\varphi^{(m,k)}, \tag{7}$$

где λ — отношение сигнал/шум, $\varphi^{m,k}$ — угол между векторами поляризации сигналов m и k на сфере Пуанкаре. Всюду в дальнейшем вместо алгоритма (4) мы будем рассматривать его частный случай (5).

Найдем выражение для полной вероятности ошибки декодирования в случае двоичной связи ($m=0,1$). При этом алгоритм (5) эквивалентен нахождению знака у статистики

$$\tau = x_0 - x_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \vec{z}_n^{+} (Q_0 - Q_1) \vec{z}_n \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0. \tag{8}$$

Характеристическая функция этой статистики вычисляется на основании распределения (1). После перехода к СВ она принимает вид ([4]):

$$\varphi(u/H_k) = E(e^{i\tau u}/H_k) = \left(1 - i\frac{a_1}{N}u\right)^{-N} \left(1 - i\frac{a_2}{N}u\right)^{-N}, \qquad u \in R^1 \tag{9}$$

где параметры $a_{1,2}$ при гипотезе H_0 связаны с параметром $\theta^{(0,1)}$ из (7)

$$a_{1,2} = \frac{1}{2}(1 - e^{\pm\theta}), \quad \theta = \theta^{(0,1)} \tag{10}$$

При гипотезе H_1 они отличаются знаками. Путем обратного Фурье-преобразования отсюда нетрудно получить выражение для плотностей распределения статистики τ при обеих гипотезах

$$
\underset{(k=0,1)}{f(\tau/H_k)} =
$$

$$
=\begin{cases} \left(\frac{w_1}{w_1-w_2}\right)^N \sum\limits_{n=1}^{N} \binom{N+n-1}{n}\left(\frac{w_2}{w_2-w_1}\right)^n \gamma_{N-n}(iw_2\tau), \ \mathrm{Im}\, w_2<0, \ \tau\geqslant 0 \\ \left(\frac{w_2}{w_2-w_1}\right)^N \sum\limits_{n=1}^{N} \binom{N+n-1}{n}\left(\frac{w_1}{w_1-w_2}\right)^n \gamma_{N-n}(iw_1\tau), \ \mathrm{Im}\, w_1<0, \ \tau<0. \end{cases} \tag{11}
$$

Здесь $\gamma_n(x)$ — плотность гамма-распределения (χ^2 — распределения с $2n$ степенями свободы ([1])). Параметры $w_{1,2}$ при этом равны

$$
w_{1,2}/H_0 = -\frac{iN}{a_{1,2}}, \qquad w_{1,2}/H_1 = \frac{iN}{a_{2,1}}.
$$

Отсюда находим выражение для полной вероятности ошибки, которая в данном случае совпадает с вероятностями ошибок 1-го и 2-го рода ([6,7])

$$
P(\varepsilon) = P(\tau\geqslant 0/H_0) = P(\tau<0/H_1) =
$$

$$
=\left(\frac{a_2}{a_2-a_1}\right)^N \sum_{n=1}^{N} \binom{N+n-1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1-a_2}\right)^n. \tag{12}
$$

После подстановки значений $a_{1,2}$ из (10) окончательно получаем

$$
P(\varepsilon) = \left(\frac{1-\mathrm{th}\,\theta/_2}{2}\right)^N \sum_{n=1}^{N} \binom{N+n-1}{n}\left(\frac{1+\mathrm{th}\,\theta/_2}{2}\right)^n. \tag{13}
$$

Из полученной формулы непосредственно видно, что вероятность ошибки при фиксированном размере выборки N и отношении сигнал /шум λ монотонно убывает с увеличением угла φ между векторами поляризации сигналов на сфере Пуанкаре и достигает минимума для противоположно поляризованных сигналов $\varphi=\pi$.

$$
\min_{\varphi} P(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{N} \binom{N+n-1}{n} \frac{(1+2\lambda)^n}{(2+2\lambda)^{N+n}}, \quad \vec{\pi}_s^{(1)} = -\vec{\pi}_s^{(0)}. \tag{14}
$$

Статистика (8), согласно выражению для ее характеристической функции (9), является асимптотически нормальной с противоположными значениями средних и одинаковой дисперсией для обеих гипотез

$$
\begin{aligned} E(\tau/H_1) &= -E(\tau/H_0) = -(a_1+a_2) = 2\mathrm{sh}^2\theta/_2 \\ \mathrm{var}(\tau/H_0) &= \mathrm{var}(\tau/H_1) = \frac{1}{N}\, 2\mathrm{sh}^2\theta/_2\,\mathrm{ch}\,\theta. \end{aligned} \tag{15}
$$

Вероятность ошибки при этом выражается через функцию Лапласа ([8,7]):

$$P(\varepsilon)\sim 1-\Phi\left(\frac{d_N}{2}\right)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi d_N^2}}\exp\left(-\frac{d_N^2}{8}\right),$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy, \tag{16}$$

где d_N есть расстояние между гипотезами, определяемое как

$$d_N^2=\frac{[E(\tau/H_1)-E(\tau)/H_0]^2}{\mathrm{var}(\tau)}=4N\frac{\mathrm{ch}\theta-1}{\mathrm{ch}\theta}. \tag{17}$$

Для противоположно поляризованных сигналов оно максимально

$$\max_{\theta} d_N^2=8N\frac{\lambda^2}{\lambda^2+(1+\lambda)^2}. \tag{18}$$

Таким образом, задача декодирования двух равновероятных ПП сигналов одинаковой интенсивности в НП шуме решена нами полностью.

Рассмотрим теперь более общий случай передачи произвольного конечного числа M символов алфавита. Декодирующее устройство по-прежнему выбирает минимальную из статистик (5). При этом полная вероятность ошибки вычисляется на основании следующих формул:

$$P(\varepsilon)=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}P(\varepsilon/H_m),$$

$$P(\varepsilon/H_m)=\int\limits_0^{\infty}\left[1-P\left(\bigcap_{k\neq m}A_k\right)\right]f(x_m/H_m)dx_m, \tag{19}$$

где A_k есть событие вида $x_k\geqslant x_m$, а пределы интегрирования соответствуют условию неотрицательности эрмитовой формы x_m. Случайный M-мерный вектор $\vec{x}=(\bar{x}_m)_0^{M-1}$ имеет характеристическую функцию, которая при гипотезе H_m вычисляется по формуле:

$$\varphi(\vec{u}/H_m)=E(e^{i\vec{u}\vec{x}}/H_m)=|\det Q_m|^N\left|\det\left(Q_m-\frac{i}{N}\sum_{k=0}^{M-1}u_kQ_k\right)\right|^{-N} \tag{20}$$

с помощью распределения (1). Переходя к СВ $\vec{\sigma}_m$, получаем:

$$\varphi(\vec{u}/H_m)=\left|1-\frac{i}{N}\vec{u}\vec{a}^{(m)}-\frac{1}{4N^2}\vec{u}'C^{(m)}\vec{u}\right|^{-N}, \tag{21}$$

где вектор $\vec{a}^{(m)}$ и матрица $C^{(m)}$ имеют следующие компоненты:

$$a_k^{(m)}=a_m^{(k)}=\mathrm{ch}\,\theta_{km},\quad c_{ke}^{(m)}=c_{lk}=\mathrm{ch}\theta_{lk}. \tag{22}$$

Отсюда в принципе может быть найдена и плотность распределения, однако вычисление M-кратного интеграла Фурье затруднительно. Поэтому мы ограничимся лишь нахождением верхней границы вероятности ошибки при гипотезе H_m $P(\varepsilon/H_m)$, используя для этого известные формулы теории вероятностей

$$\Omega \setminus \bigcap_{k \neq m} A_k = \bigcup_{k \neq m} \overline{A}_k, \quad P(\bigcup_{k \neq m} \overline{A}_k) \leqslant \sum_{k \neq m} P(\overline{A}_k). \tag{23}$$

Здесь Ω—полное пространство элементарных событий, $\overline{A}_k = \{x_k < x_m\}$—событие, противоположное A_k. Использование правой части последнего неравенства означает, что события $\overline{A}_k$ считаются независимыми в совокупности. Учитывая также, что вероятность события $\overline{A}_k$ равна значению интегральной функции распределения случайной величины x_k при гипотезе $H_m(k \neq m)$ в точке x_m, для верхней границы вероятности (19) получаем выражение

$$P(\varepsilon/H_m) \leqslant B_m = \sum_{k \neq m} \int_0^\infty F_k(x_m/H_m) f(x_m/H_m) dx_m \tag{24}$$

Далее, полагая $\overline{u} = (0, \ldots, u_k, \ldots 0)$, $\overline{u} = (0, \ldots, u_m, \ldots, 0)$ в выражении для характеристической функции (21) и вычисляя одномерные интегралы Фурье, получаем следующие выражения для плотностей распределения x_k:

$$f(x_k/H_m) = (1-e^{-2\theta})^{-N} \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N+n-1}{n} (1-e^{2\theta})^n \gamma_{N-n}(2Ne^{\theta} x_k) +$$

$$+ (1-e^{2\theta})^{-N} \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N+n-1}{n} (1-e^{-2\theta})^n \gamma_{N-n}(2Ne^{-\theta} x_k), \tag{25}$$

$$\theta = \theta^{(k,m)}, \quad x_k \geqslant 0$$

для значений $k \neq m$. При $k=m$ получаем гамма-распределение

$$f(x_m/H_m) = \gamma_{2N}(2Nx_m), \quad x_m \geqslant 0 \tag{26}$$

При вычислении интегральных функций $F_k(x_m/H_m)$ в (24) плотности γ_n заменяются на неполные нормированные гамма-функции Эйлера, которые в свою очередь представимы в виде конечных сумм [1]. Выполняя интегрирование по переменной x_m, окончательно получаем выражение для расчета верхней границы полной вероятности ошибки с помощью ЭВМ по несложной программе

$$B_m = M - 1 - \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N+n-1}{n} \sum_{\nu=0}^{N+n-1} \binom{2N+\nu-1}{\nu} \times$$

$$\times \sum_{k \neq m} [\psi_N(\theta^{(k,m)}, n, \nu) + \psi_N(-\theta^{(k,m)}, n, \nu)] \tag{27}$$

где

$$\psi_N(\theta, n, \nu) = (1-e^{-2\theta})^{-N} (1 - e^{2\theta})^n (1 + e^{\theta})^{-(2N-\nu)},$$

$$n=\overline{0,\ N-1},\quad \nu=\overline{0,\ N+n-1}. \qquad (28)$$

Полученный в настоящей работе алгоритм (5) или (8), основанный на оценке $\dot{\xi}$ СВ излучения, может быть положен в основу синтеза приемника шумоподобных сигналов с поляризационной модуляцией в дискретной связи.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Է. Հ. ՄԻՐԶԱԲԵԿՅԱՆ, Լ. Պ. ՄՈՒՐԶԱ

Աղմկանման ազդանշանների ըստ բևեռացման դիսկրետ մոդուլյացիայով ոչ կոհերենտ կապ

Դիտարկված է աղմկանման ազդանշանների ամենաբարենպաստ դեկոդացման խնդիրը: Գտնված է դեկոդացման ալգորիթմի կառուցվածքը՝

$$\hat{H}=H_m \Longleftrightarrow (\vec{\xi}_0,\vec{e}_m)\leqslant(\vec{\xi}_0,\vec{e}_k),\ k\neq m,\ k,\ m=\overline{0,\ M-1}$$

$$\vec{\xi}_0=\vec{\xi}/|\vec{\sigma}|,\qquad \vec{\sigma}_m=\vec{\sigma}_m/|\vec{\sigma}|,$$

որտեղ $\vec{\xi}$ — ընտրողական Ստոքսի վեկտորն է (3,4), իսկ $\vec{\sigma}=E\vec{\xi}$ — նրա միջինը: Երկու հավասար ինտենսիվությամբ և լրիվ բևեռացված ազդանշանների համար միավոր ինտենսիվությամբ ոչ բևեռացված աղմուկի մեջ գտնված է ընդհանուր սխալի հավանականությունը (10)՝

$$P_N(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N-1}\binom{N+n-1}{n}\left[\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{th}\,\frac{\vartheta}{2}\right)\right]^N\left[\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{th}\,\frac{\vartheta}{2}\right)\right]^n$$

$$\mathrm{ch}\,\vartheta=(\vec{e}_0,\vec{e}_1)=\frac{(1+\lambda)^2-\lambda^2\cos\varphi}{(1+\lambda)^2-\lambda^2}$$

Պարզվում է, որ այն ամենափոքրն է հակառակ բևեռացված ազդանշանների հաղորդման դեպքում:

$$\varphi=\pi,\quad \min_{\varphi} P_N(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N-1}\binom{N+n-1}{n}(1+2\lambda)^n\,[2(1+\lambda)]^{-(N+n)}$$

Գտնված է $P_N(\varepsilon)$-ի մեծությունը, երբ $N\gg1$ և ստացված է $P_N(\varepsilon)$-ի վերին սահմանի համար արտահայտությունը, երբ հաղորդվող այբուբենի ազդանշանների թիվը կամավոր է՝ $k=\overline{0,\ M-1}$:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. C. Ko.* IEEE Trans. on Antennas and Propagation, AP—15, 10, 1967. [2] *Д. Б. Канарейкин, В. А. Потехин, И. Ф. Шишкин.* Морская поляриметрия, Изд. Судостроение, Л., 1968. [3] *Л. П. Мурза.* «Известия АН Арм. ССР», Физика, 10, 412 (1975). [4] *Л. П. Мурза.* «Радиотехника и электроника», XXI, 5, 1090, 1976. [5] *K. S. Miller,* SIAM Review, 11, 544, 1969. [6] *Б. Р. Левин.* Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 2, Изд. Советское радио, М., 1975. [7] *Г. Ван-Трис.* Теория обнаружения, оценок и модуляции, Изд. Советское радио, М., 1973.