ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIV 1977 1

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. Е. Мирзоян

О построении функций влияния для кусочно неоднородно наследственно-стареющей полуплоскости

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 26/VI 1976)

Построение функций влияния для полуплоскости-определение перемещений ее граничных точек от единичных сосредоточенных вертикальных и горизонтальных сил, в рамках теории ползучести наследственно стареющих сред [1], когда возраст материала не зависит от пространственных координат, можно осуществить обычными методами решения известной задачи Фламана из теории упругости [2]. Когда же возраст материала полуплоскости зависит от пространственных координат, даже в виде простейших функций, решение соответствующей задачи Фламана требует преодоления значительных трудностей математического характера.

В настоящей работе на основе определяющих реологических уравнений теории ползучести неоднородно наследственно-стареющей среды [3] рассматривается задача равновесия упруго-ползучей кусочно неоднородной полуплоскости, состоящей из двух полос, возрасты материала которых различны. В результате строятся функции влияния — перемещения граничных точек такой полуплоскости от единичных вертикальных и горизонтальных сосредоточенных сил, приложенных на ее границе.

1. Пусть деформируемая полуплоскость, механическое поведение которой описывается реологическими уравнениями теории ползучести наследственно-стареющих сред, состоит из полосы ширины H и полосы в виде полуплоскости. Предполагается, что физико-механические характеристики этих полос различные, которые в дальнейшем будут отмечены индексами 1 и 2 соответственно. Пусть далее, такая полуплоскость на своей границе в момент времени $t=\tau_0$ нагружена вертикальной сосредоточенной силой $P(t)\delta(x)$, где $P(t)$ — произвольная функция от времени, а $\delta(x)$ — известная дельта-функция Дирака (рис. 1).

В случае плоской деформации основные реологические уравнения — связь между напряжениями и деформациями будут [2].

$$\varepsilon_x^{(j)}(t)=\frac{\sigma_x^{(j)}(t)-\nu_j\sigma_y^{(j)}(t)}{E_j(t)}-\int_{\tau_0}^{t}[\sigma_x^{(j)}(\tau)-\nu_j\sigma_y^{(j)}(\tau)]K(t+\rho_j,\tau+\rho_j)d\tau,$$

$$\varepsilon_y^{(j)}(t)=\frac{\sigma_y^{(j)}(t)-\nu_j\sigma_x^{(j)}(t)}{E_j(t)}-\int_{\tau_0}^{t}[\sigma_y^{(j)}(\tau)-\nu_j\sigma_x^{(j)}(\tau)]K(t+\rho_j,\tau+\rho_j)d\tau, \quad (1.1)$$

$$\gamma_{xy}^{(j)}(t)=2(1+\nu_j)\left\{\frac{\tau_{xy}^{(j)}(t)}{E_j(t)}-\int_{\tau_0}^{t}\tau_{xy}^{(j)}(\tau)K(t+\rho_j,\tau+\rho_j)d\tau\right\}. \quad (j=1,2).$$

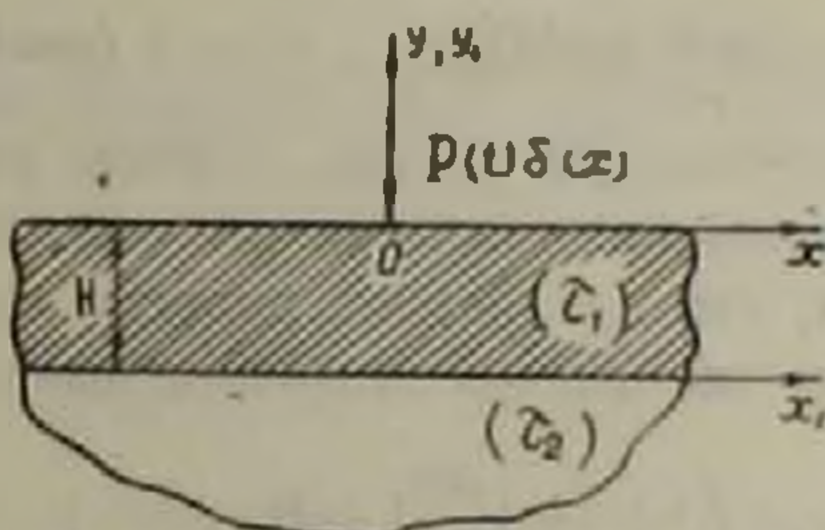

Рис. 1

Здесь $E_j(t)$—модули упруго-мгновенной деформации, t—момент текущего времени, $\rho_j=\tau_j-\tau_0$, а τ_j—возрасты материалов полос $(j=1,2)$,

$$K(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right], \quad (1.2)$$

где

$$C(t,\tau)=\varphi(\tau)[1-e^{-\gamma(t-\tau)}]$$

мера ползучести, $\varphi(\tau)$—известная функция, определяющая процесс старения материала ([1]).

Отметим, что при выводе соотношений (1.1) принято условие

$$\nu_j^*(t,\tau)=\nu_j(t)=\nu_j=\mathrm{const}, \quad (1.3)$$

где $\nu_j^*(t,\tau)$—коэффициент поперечного расширения при деформациях ползучести, а $\nu_j(t)$—коэффициент поперечного расширения при упруго-мгновенных деформациях. Как известно ([1]), это равенство при линейной зависимости между напряжениями и деформациями приводит к равенству между упруго-мгновенными напряжениями, вызванными поверхностными силами, и соответствующими напряжениями, вычисленными с учетом ползучести.

Обозначив через $u_j(x,y,t)$ и $v_j(x,y,t)$ $(j=1,2)$ компоненты перемещений в полосах при упруго-мгновенной деформации по направлению Ox и Oy соответственно, а через $u_j^*(x, y, t)$ и $v_j^*(x, y, t)$ $(j=1,2)$ те же величины—при деформации ползучести, из (1.1) находим, что между ними существует зависимость вида:

$$u_j^*(t)=u_j(t)-\int_{\tau_0}^{t} u_j(\tau)K_j(t, \tau)d\tau$$

$$v_j^*(t)=v_j(t)-\int_{\tau_0}^{t} v_j(\tau)K_j(t, \tau)d\tau \quad (j=1, 2), \tag{1.4}$$

где

$$K_j(t,\tau)=E_j(t)K(t+\rho_j, \tau+\rho_j) \ (j=1,2).$$

Для решения поставленной задачи, сначала рассмотрим соответствующие упруго-мгновенные задачи для полос в отдельности. С этой целью заметим, что для первой полосы должны удовлетворяться уравнения Ляме по пространственным координатам

$$\Delta u_1+\left(1+\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}=0$$

$$\Delta v_1+\left(1+\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\frac{\partial\Theta_1}{\partial y}=0 \qquad \Delta\Theta_1=0 \tag{1.5}$$

при граничных условиях

$$\sigma_y^{(1)}(t)/_{y=0}=\left[(\lambda_1+2\mu_1)\frac{\partial v_1}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]\Bigg|_{y=0}=-P(t)\delta(x),$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(t)|_{y=0}=\mu_1\left[\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]\Bigg|_{y=0}=0, \tag{1.6}$$

а для полуплоскости—те же самые уравнения Ляме

$$\Delta_1 u_2+\left(1+\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_1}=0$$

$$\Delta_1 v_2+\left(1+\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\frac{\partial\Theta_2}{\partial y_1}=0 \qquad \Delta_1\Theta_2=0 \tag{1.7}$$

при условиях $\sigma_{x_1}^{(2)}(t)$, $\tau_{x_1y_1}^{(2)}(t)$, $\sigma_{y_1}^{(2)}(t)\to 0$ при $x_1^2+y_1^2\to\infty$ (1.8)

Здесь

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad \Theta_1=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad \Theta_2=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}. \tag{1.9}$$

Введем в рассмотрение образы Фурье по координате x

$$F[u_j] = \bar{u}_j, \quad F[v_j] = \bar{v}_j, \quad F[\Theta_j] = \bar{\Theta}_j,$$

$$F[\sigma_y^{(j)}] = \bar{\sigma}_y^{(j)}, \quad F[\tau_{xy}^{(j)}] = \bar{\tau}_{xy}^{(j)}, \quad (j = 1, 2).$$

Применяя к уравнениям (1.5), (1.7), граничным условиям (1.6) и условиям (1.8) преобразование Фурье, после некоторых выкладок получаем для первой полосы

$$\bar{\Theta}_1(s, y, t) = A(s, t)e^{|s|y} + B(s, t)e^{-|s|y},$$

$$\bar{u}_1 = [A_1(s, t) + ip_1yA(s, t)\,\mathrm{sign}\, s]e^{|s|y} + [B_1(s, t) - ip_1yB(s, t)\,\mathrm{sign}\, s]e^{-|s|y},$$

(1.10)

$$\bar{v}_1 = [A_2(s, t) - p_1yA(s, t)]e^{|s|y} + [B_2(s, t) - p_1yB(s, t)]e^{-|s|y},$$

а для полуплоскости будем иметь

$$\bar{\Theta}_2(s, y_1, t) = F(s, t)e^{|s|y_1}$$

$$\bar{u}_2 = [D_1(s, t) + ip_2y_1F(s, t)\,\mathrm{sign}\, s]e^{|s|y_1}, \tag{1.11}$$

$$\bar{v}_2 = [D_2(s, t) - p_2y_1F(s, t)]e^{|s|y_1},$$

где

$$p_j = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\nu_j}{\mu_j}\right) \quad (j = 1, 2), \quad s\text{—параметр преобразования}$$

Фурье.

Из соотношений (1.9) имеем

$$\bar{\Theta}_1 = \frac{d\bar{v}_1}{dy} - is\bar{u}_1, \quad \bar{\Theta}_2 = \frac{d\bar{v}_2}{dy_1} - is\bar{u}_2. \tag{1.12}$$

Далее удовлетворяя граничным условиям и учитывая (1.12), после некоторых выкладок для первой полосы находим

$$\bar{u}_1(s, -H, t) = \frac{i}{2s}\left[a_1A(s, t) + a_2B(s, t) + \frac{P(t)}{2\mu_1}(e^k + e^{-k})\right],$$

$$\bar{v}_1(s, -H, t) = \frac{1}{2|s|}\left[a_3A(s, t) + a_4B(s, t) + \frac{P(t)}{2\mu_1}(e^k - e^{-k})\right], \tag{1.13}$$

$$\bar{\sigma}_y^{(1)}(s, -H, t) = a_5A(s, t) - a_6B(s, t) - \frac{P(t)}{2}(e^k + e^{-k}),$$

$$\bar{\tau}_{xy}^{(1)}(s, -H, t) = i\,\mathrm{sign}\, s\left[a_7A(s, t) - a_8B(s, t) - \frac{P(t)}{2}(e^k - e^{-k})\right],$$

а для полуплоскости—

$$\overline{u}_2(s,0,t)=D_1(s,t),\qquad \overline{v}_2(s,0,t)=D_2(s,t)$$

$$\overline{\sigma}^{(2)}_{y_1}(s,0,t)=\frac{\mu_2}{p_2+1}\Big[(1+2p_2)|s|D_2(s,t)+isD_1(s\,t)\Big],$$

$$\overline{\tau}^{(2)}_{x_1y_1}(s,0,t)=-\frac{i\mu_2\,\mathrm{sign}\,s}{p_2+1}\Big[(1+2p_2)isD_1(s,t)+|s|D_2(s,t),\Big], \tag{1.14}$$

где

$$a_1=(p_1+1-2p_1k)e^{-k}+p_1e^k,\quad a_2=p_1e^{-k}+(p_1+1+2p_1k)e^k,$$

$$a_3=(p_1+1+2p_1k)e^{-k}+p_1e^k,\quad a_4=(2p_1k-p_1-1)e^k-p_1e^{-k},$$

$$a_5=\mu_1p_1[(1+2k)e^{-k}-e^k],\quad a_6=\mu_1p_1[e^{-k}+(2k-1)e^k], \tag{1.15}$$

$$a_7=\mu_1p_1[(1-2k)e^{-k}-e^k],\quad a_8=\mu_1p_1[(1+2k)e^k-e^{-k}],\quad k=|s|\cdot H$$

Имея в виду соотношения (1.4) и приравнивая на линии соединения полос напряжения и перемещения с учетом ползучести, после исключения коэффициентов $D_1(s,t)$ и $D_2(s,t)$ для определения неизвестных $A(s,t)$ и $B(s,t)$ получаем систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$(a_1+a_3)A(s,t)+(a_2+a_4)B(s,t)+\frac{p_2+1}{p_2\mu_2}\Big[(a_6+a_8)B(s,t)-(a_5+a_7)A(s,t)\Big]-$$

$$-\int_{\tau_0}^{t}[(a_1+a_3)A(s,\tau)+(a_2+a_4)B(s,\tau)]K_1(t,\tau)d\tau-\frac{p_2+1}{p_2\mu_2}\int_{\tau_0}^{t}[(a_6+a_8)B(s,\tau)-$$

$$-(a_5+a_7)A(s,\tau)]K_2(t,\tau)d\tau=-\frac{e^k}{\mu_1}\Big[P(t)-\int_{\tau_0}^{t}P(\tau)K_1(t,\tau)d\tau\Big]-\frac{p_2+1}{p_2\mu_2}\Big[P(-t)$$

$$-\int_{\tau_0}^{t}P(\tau)K_2(t,\tau)d\tau\Big]e^k, \tag{1.16}$$

$$(a_1-a_3)A(s,t)+(a_2-a_4)B(s,t)+\frac{1}{\mu_2}\,[(a_5-a_7)A(s,t)-(a_6-a_8)B(s,t)]-$$

$$-\int_{\tau_0}^{t}[(a_1-a_3)A(s,\tau)+(a_2-a_4)B(s,\tau)]K_1(t,\tau)d\tau-\frac{1}{\mu_2}\int_{\tau_0}^{t}[(a_5-a_7)A(s,\tau]-$$

$$-(a_6-a_8)B(s,\tau)]K_2(t,\tau)d\tau=-\frac{e^{-k}}{\mu_1}\Big[P(t)-\int_{\tau_0}^{t}P(\tau)K_1(t,\tau)d\tau\Big]+$$

$$+\frac{e^{-k}}{\mu_2}\Big[P(t)-\int_{\tau_0}^{t}P(\tau)K_2(t,\tau)d\tau\Big].$$

Для получения более простых результатов в дальнейшем, примем, что упругие постоянные для материалов полосы и полуплоскости равны, т. е.

$$p_1=p_2=p,\quad E_1(t)=E_2(t)=E=\mathrm{const},\quad \gamma_1=\gamma_2=\gamma$$

Тогда систему (1.16) можно преобразовать к одному интегральному уравнению следующего вида:

$$2(2p+1)\chi(s,t)+\int_{\tau_0}^{t}[mK_1(t,\tau)+nK_2(t,\tau)]\chi(s,\tau)d\tau=L(s,t), \tag{1.17}$$

где

$$\chi(s,t)=\alpha A(s,t)+\beta B(s,t),\quad m=-2(2p+1)-n,$$

$$L(s,t)=\beta f_2(s,t)+\alpha[f_1(t)-2kf_2(s,t)],$$

$$f_1(t)=-\frac{2p+1}{p\mu}P(t)+\frac{1}{\mu}\int_{\tau_0}^{t}P(\tau)\left[K_1(t,\tau)+\frac{p+1}{p}K_2(t,\tau)\right]d\tau, \tag{1.18}$$

$$f_2(s,t)=\frac{e^{-2k}}{\mu}\int_{\tau_0}^{t}P(\tau)[K_1(t,\tau)-K_2(t,\tau)]d\tau$$

α и β—некоторые величины от s.

Здесь n корень квадратного уравнения

$$n^2-2[4k^2pe^{-2k}+(2p+1)(e^{-2k}-1)]n+4p(e^{-2k}-1)\times$$

$$\times[4k^2pe^{-2k}+(p+1)(e^{-2k}-1)]-16k^2pe^{-2k}(1+pe^{-2k})=0, \tag{1.19}$$

а отношение $h=\alpha/\beta$ — квадратного уравнения

$$4k(1+pe^{-2k})h^2+2[4k^2pe^{-2k}+e^{-2k}-1]h-4kpe^{-2k}=0. \tag{1.20}$$

2. Можно показать, что решение интегрального уравнения (1.17) эквивалентно решению дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами при известных начальных условиях, решение которого будет даваться формулой ([1])

$$\chi(s,t)=\frac{\beta f_2(s,t)+\alpha[f_1(t)-2kf_2(s,t)]}{2(2p+1)}-[\eta'(s,\tau_0)-\gamma]\times$$

$$\times\frac{\alpha f_1(\tau_0)}{2(2p+1)}\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}d\tau-\int_{\tau_0}^{t}\frac{1}{2(2+1)}e^{-\eta(s,\tau)}d\tau\int_{\tau_0}^{\tau}\{\beta f_2(z)+$$

$$+\alpha[f_1(z)-2kf_2'(s,z)]\}e^{\eta(s,z)}[\eta'(s,z)-\gamma]dz. \tag{2.1}$$

где

$$\eta(s,t)=\int_{\tau_0}^{t}A^*(s,\tau)d\tau,$$

$$A^*(s, t) = \frac{\gamma}{2(2p+1)}\left[2(2p+1) - mE\varphi_1(t) - nE\varphi_2(t)\right].$$

После этого можно записать перемещение граничных точек кусочно-неоднородной упруго-ползучей полуплоскости. Останавливаясь на том частном случае, когда $P(t)=H(t-\tau_0)$, где $H(t)$ — известная единичная функция Хевисайда, будем иметь:

$$u_1^*(x, 0, t) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E}\operatorname{sign} x - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(s, \tau_0, \tau_1, \tau_2, t)e^{-isx}ds,$$

$$v_1^*(x, 0, t) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\ln\frac{1}{|x|} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(s, \tau_0, \tau_1, \tau_2, t)e^{-isx}ds, \tag{2.2}$$

где

$$\Phi_1(s, t) = \frac{i}{4s(h_1-h_2)}\left\{\left[\eta_1'(s, \tau_0)-\gamma\right]f_1(\tau_0)(1-h_2)h_1 + \frac{\gamma E}{\mu}\left[e^{-2k}(\varphi_1(\tau_0) -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\varphi_2(\tau_0))(1-2kh_1)(1-h_2) + \left(\varphi_1(\tau_0) + \frac{p+1}{p}\varphi_2(\tau_0)\right)h_1(1-h_2)\right]\right\}\int\limits_{\tau_0}^{t} e^{-\eta_1(s,\tau)}d\tau -$$

$$-\frac{i}{4s(h_1-h_2)}\left\{\left[\eta_2'(s, \tau_0)-\gamma\right]f_1(\tau_0)(1-h_1)h_2 + \frac{\gamma E}{\mu}\left[e^{-2k}(\varphi_1(\tau_0) - \varphi_2(\tau_0))(1-\right.\right.$$

$$\left.\left. -2kh_2)(1-h_1) + \left(\varphi_1(\tau_0) + \frac{p+1}{p}\varphi_2(\tau_0)\right)h_2(1-h_1)\right]\right\}\int\limits_{\tau_0}^{t} e^{-\eta_2(s,\tau)}d\tau,$$

$$\Phi_2(s, t) = \frac{1}{4|s|(h_1-h_2)}\left\{\left[\eta_1'(s, \tau_0)-\gamma\right]f_1(\tau_0)(1+h_2)h_1 + \frac{\gamma E}{\mu}\left[e^{-2k}(\varphi_1(\tau_0) -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\varphi_2(\tau_0))(1-2kh_1(1+h_2) + \left(\varphi_1(\tau_0) + \frac{p+1}{p}\varphi_2(\tau_0)\right)(1+h_2)h_1\right]\right\}\int\limits_{\tau_0}^{t} e^{-\eta_1(s,\tau)}d\tau -$$

$$-\frac{1}{4|s|(h_1-h_2)}\left\{\left[\eta_2'(s, \tau_0) - \gamma\right]f_1(\tau_0)(1+h_1)h_2 + \frac{\gamma E}{\mu}\left[e^{-2k}(\varphi_1(\tau_0) -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\varphi_2(\tau_0))(1-2kh_2)(1+h_1) + \left(\varphi_1(\tau_0) + \frac{p+1}{p}\varphi_2(\tau_0)(1+h_1)h_2\right]\right\}\int\limits_{\tau_0}^{t} e^{-\eta_2(s,\tau)}d\tau,$$

$$\eta_j(s, t) = \frac{\gamma}{2(2p+1)}\int\limits_{\tau_0}^{t}\left[2(2p+1) - m_jE\varphi_1(\tau) - n_jE\varphi_2(\tau)\right]d\tau.$$

h_j — корни квадратного уравнения (1.20), n_j — корни квадратного уравнения (1.19) а $m_j = -2(2p+1) - n_j$ $(j=1,2)$.

Аналогичный вид имеют выражения перемещений граничных точек кусочно-неоднородной полуплоскости в случае единичной сосредоточенной горизонтальной силы, приложенной к ее границе в момент времени $t=\tau_0$.

Автор искренне признателен Н. Х. Арутюняну за постановку задачи и руководство работой.

Ереванский государственный университет

Ս. Ե. ՄԻՐԶՈՅԱՆ

Կտոր առ կտոր անհամասեռ ժառանգականորեն ծերացող կիսահարթության համար ազդեցության ֆունկցիայի կառուցման մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է կտոր առ կտոր անհամասեռ ժառանգականորեն ծերացող կիսահարթության հավասարակշռությունը, որը բաղկացած է տարբեր հասակներ ունեցող երկու շերտերից։

Խնդրի լուծումը բերվում է Վոլտերայի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծմանը։ Վերջինիս հիման վրա ստացված են կիսահարթության եզրագծի կետերի տեղափոխությունները միավոր կենտրոնացված նորմալ և հորիզոնական ուժերից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952. [2] *В. В. Новожилов.* Теория упругости, Судпромгиз, 1958. [3] *Н. Х. Арутюнян.* МТТ, № 3, 1976.