ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIV 1977 1

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян, Р. Г. Аванесян

Об одной контактной задаче для упругой полосы, усиленной бесконечным стрингером

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 26/VI 1976)

Работа посвящена исследованию плоской контактной задаче о передаче нагрузки от бесконечного упругого стрингера малой толщины к защемленной одной гранью полосе. Предполагается, что для стрингера, нагруженного одновременно вертикальными и горизонтальными силами, справедлива модель изгиба балки в сочетании с моделью одноосного напряженного состояния стержня ([1,2]). В рамках этой модели поставленная задача математически сформулируется в виде системы интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных контактных напряжений. При помощи преобразования Фурье решение последней системы представляется интегралами довольно простой структуры.

В частном случае, когда стрингер только изгибается под действием вертикальных сил, из этого решения получается решение задачи об изгибе бесконечной балки на упругой защемленной одной гранью полосе, представляющей аналог известной задачи Герсеванова-Мачерета ([3]).

В другом частном случае, когда стрингер под действием только горизонтальных сил находится в одноосном напряженном состоянии, из этого же решения получается решение задачи, представляющей аналог известной задачи Мелана ([4]).

В указанных двух частных случаях получены числовые результаты, иллюстрирующие ход изменения контактных напряжений. Следует отметить, что обсуждаемая здесь задача непосредственно связана с кругом задач об изгибе балок и плит на упругом основании, которым посвящены работы ([5–8]).

1°. Пусть упругая изотропная полоса толщины H, защемленная гранью $y=-H$ и находящаяся в условиях плоской деформации, на другой своей грани усилена бесконечным упругим стержнем (стрингером) малой толщины h.

Пусть далее усиленная таким способом полоса нагружена вертикальными и горизонтальными силами интенсивностей $p_0(x)$ и $q_0(x)$

соответственно (рис. 1). Требуется определить законы изменения нормальных и тангенциальных контактных напряжений вдоль линии соединения стрингера с полосой. При этом, как отмечалось выше, будем предполагать, что стрингер в вертикальном направлении изгибается как

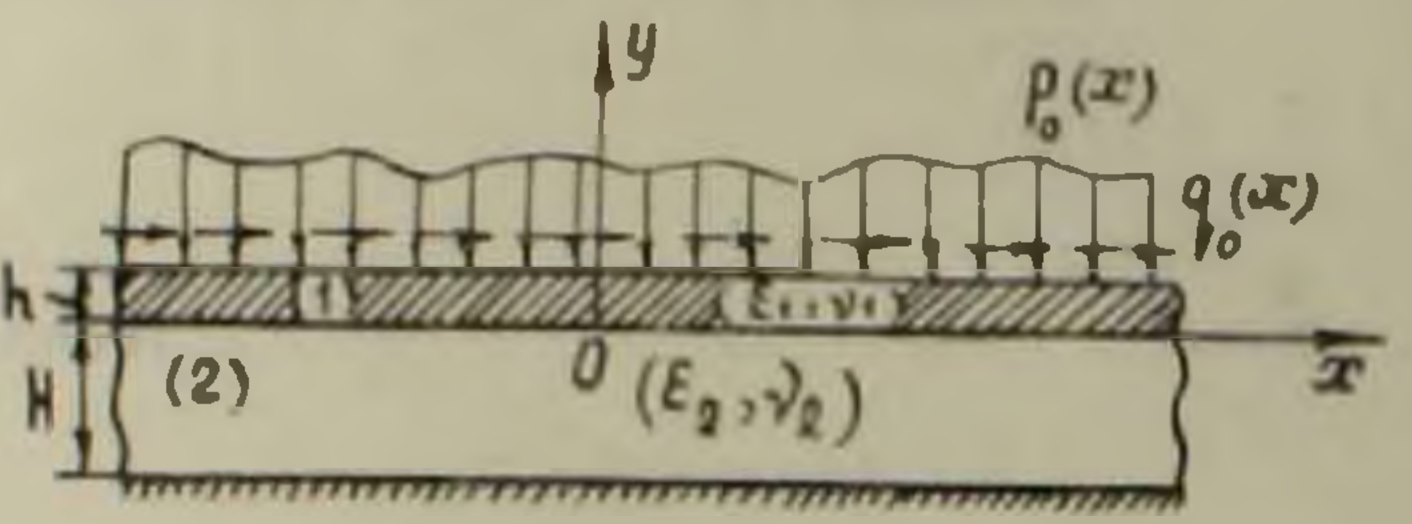

Рис. 1

обычная балка, а в горизонтальном направлении сжимается или растягивается как стержень, находясь в одноосном напряженном состоянии. Будем предполагать также, что стержень обладает конечной жесткостью на изгиб, вследствие чего будем считать модуль упругости стержня E_1, намного больше модуля упругости полосы E_2. Последнее предположение обусловлено малостью толщины стержня.

Приступим теперь к выводу основной системы разрешающих функциональных уравнений. Предварительно приведем выражения перемещений граничных точек упругой полосы. Обозначим интенсивности нормальных и горизонтальных контактных напряжений действующих вдоль линии соединения стрингера с упругой полосы через $p(x)$ и $q(x)$ соответственно. Тогда исходя из ([10]) при помощи преобразования Фурье легко получить, что вертикальные и горизонтальные перемещения граничных точек упругой полосы $v_2(x)$ и $u_2(x)$ выражаются формулами

$$\left\{\begin{aligned} v_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} k_{11}(|x-\xi|)p(\xi)d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} k_{12}(x-\xi)q(\xi)d\xi \\ u_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} k_{21}(x-\xi)p(\xi)d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} k_{22}(|x-\xi|)q(\xi)d\xi \end{aligned}\right. \quad (-\infty<x<\infty) \qquad (1.1)$$

где

$$\left.\begin{aligned} k_{1j}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} K_{1j}(s)[(2-j)\cos sx+(j-1)\sin sx]ds \\ k_{2j}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} K_{2j}(s)[(j-1)\cos sx+(2-j)\sin sx]ds \end{aligned}\right\} (j=1,2)$$

$$K_{jj}(s) = (2\varkappa+1)[2H\varkappa s+(-1)^j(\varkappa+1)\operatorname{sh}2Hs]/2\mu sK(s)$$

$$K_{12}(s) = K_{21}(s) = [4H^2\varkappa^2s^2+(\varkappa+1)(1-\operatorname{ch}2Hs)]/2\mu sK(s)$$

$$K(s)=2\varkappa(\varkappa+1)\operatorname{ch}2Hs+\varkappa^2(4H^2s^2+1)+(\varkappa+1)^2,$$

а $\varkappa=(\lambda+\mu)/2\mu$, λ и μ постоянные Ляме материала полосы.

С другой стороны, согласно принятой выше модели можем записать:

$$\begin{cases} D\dfrac{d^4v_1(x)}{dx^4}=p(x)-p_0(x) \\ E_1h\dfrac{d^2u_1(x)}{dx^2}=q(x)-q_0(x) \end{cases} \qquad (-\infty<x<\infty), \quad (1.2)$$

где D — жесткость стержня на изгиб.

Поскольку

$$u_1(x)=u_2(x), \qquad v_1(x)=v_2(x) \qquad (-\infty<x<\infty),$$

то на основании (1.1) и (1.2) относительно неизвестных контактных напряжений $p(x)$ и $q(x)$ получим следующую систему интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} D\dfrac{d^4}{dx^4}\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}k_{11}(|x-\xi|)p(\xi)d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}k_{12}(x-\xi)q(\xi)d\xi\right]=p(x)-p_0(x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x<\infty) \quad (1.3) \\ E_1h\dfrac{d^2}{dx^2}\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}k_{21}(x-\xi)p(\xi)d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}k_{22}(|x-\xi|)q(\xi)d\xi\right]=q(x)-q_0(x) \end{cases}$$

В частном случае, когда под действием вертикальных сил $p_0(x)$ $(q_0(x)=0)$ стрингер только изгибается, вместо системы (1.3) будем иметь интегро-дифференциальное уравнение:

$$D\frac{d^4}{dx^4}\left[\int_{-\infty}^{\infty}k_{11}(|x-\xi|)p(\xi)d\xi\right]=p(x)-p_0(x) \quad (-\infty<x<\infty). \qquad (1.4)$$

В другом частном случае, когда под действием горизонтальных сил $q_0(x)$ $(p_0(x)=0)$ стрингер только растягивается, будем иметь интегро-дифференциальное уравнение:

$$E_1h\frac{d^2}{dx^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}k_{22}(|x-\xi|)q(\xi)d\xi\right]=q(x)-q_0(x) \quad (-\infty<x<\infty). \qquad (1.5)$$

2°. Применив к обеим частям системы (1.3) преобразование Фурье, после некоторых выкладок ее решение представим формулами:

$$\begin{cases} q(x)=\dfrac{\mu}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left[K_{11}^{*}(s)Q_0(s)-K_{12}^{*}(s)P_0(s)\right]\frac{e^{-isx}}{K^{*}(s)}ds \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x<\infty) \quad (2.1) \\ p(x)=\dfrac{\mu}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left[s^2K_{21}^{*}(s)Q_0(s)+K_{22}^{*}(s)P_0(s)\right]\frac{e^{-isx}}{K^{*}(s)}ds \end{cases}$$

Здесь приняты обозначения:

$$K_{jj}^{*}(s)=[D|s|^3(2-j)+E_1h|s|(j-1)]\cdot[(\varkappa+1)\operatorname{sh}2H|s|+(-1)^j2H\varkappa|s|](2\varkappa+$$

$$+1)+2\mu K(s)\qquad (j=1,\ 2),$$

$$K_{12}^{*}(s)=K_{21}^{*}(s)=iDs[(\varkappa+1)(1-\operatorname{ch}2Hs)+4H^2\varkappa^2s^2],$$

$$K^{*}(s)=E_1hDs^4[(\varkappa+1)^2(\operatorname{ch}2Hs-1)-2H^2\varkappa^2s^2]+\mu[(2\varkappa+1)|s|[(E_1h+$$

$$+Ds^2)(\varkappa+1)\operatorname{sh}2H|s|+2H\varkappa|s|(E_1h-Ds^2)]+2\mu K(s)],$$

$$P_0(s)=\int_{-\infty}^{\infty}p_0(\xi)e^{is\xi}d\xi,\qquad Q_0(s)=\int_{-\infty}^{\infty}q_0(\xi)e^{is\xi}d\xi$$

Из формулы (2.1) вытекает, что решения частных интегро-дифференциальных уравнений (1.4) и (1.5) будут даваться соответственно формулами:

$$p(x)=\frac{\mu}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(s)}{K_{11}^{*}(s)}P_0(s)e^{-isx}ds \tag{2.2}$$

$$(-\infty<x<\infty).$$

$$q(x)=\frac{\mu}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(s)}{K_{22}^{*}(s)}Q_0(s)e^{-isx}ds \tag{2.3}$$

3°. Предположим, что, в частности, $p_0(x)=P\delta(x)$ и $q_0(x)=Q\delta(x)$, где $\delta(x)$ — известная функция Дирака. Тогда формулы (2.1) примут вид:

$$\left\{\begin{aligned} q(x)&=\frac{\mu}{\pi}\left\{Q\int_0^{\infty}\frac{K_{11}^{*}(s)}{K^{*}(s)}\cos sx\,ds-P\int_0^{\infty}\frac{K_{12}^{**}(s)}{K^{*}(s)}\sin sx\,ds\right\}\\ p(x)&=\frac{\mu}{\pi}\left\{Q\int_0^{\infty}\frac{s^2K_{21}^{**}(s)}{K^{*}(s)}\sin sx\,ds+P\int_0^{\infty}\frac{K_{22}^{*}(s)}{K^{*}(s)}\cos sx\,ds\right\}\end{aligned}\right.\qquad(-\infty<x<\infty) \tag{3.1}$$

где $K_{12}^{**}(s)=K_{21}^{**}(s)=-iK_{12}^{*}(s)$.

Входящие в эти формулы интегралы, кроме первого в выражении тангенциального контактного напряжения $q(x)$, довольно быстро сходятся. Что же касается указанного интеграла, то его сходимость можно ускорить приняв во внимание асимптотическое представление

$$\frac{K_{11}^{*}(s)}{K^{*}(s)}=\frac{A_0}{\varkappa_0+s}+0(s^{-4})\quad s\to\infty,$$

где
$$A_0=(2\varkappa+1)/E_1h(\varkappa+1),\quad \varkappa_0=\mu A_0.$$

А именно, тогда можем записать

$$\int_0^{\infty}\frac{K_{11}^{*}(s)}{K^{*}(s)}\cos sx\,ds=A_0\int_0^{\infty}\frac{\cos sx}{\varkappa_0+s}ds+\int_0^{\infty}\left[\frac{K_{11}^{*}(s)}{K^{*}(s)}-\frac{A_0}{\varkappa_0+s}\right]\cos xds$$

После элементарных выкладок отсюда находим:

$$\int_0^\infty \frac{K_{11}^*(s)}{K^*(s)} \cos sxds = -A_0 \left| \cos \varkappa_0 x \operatorname{ci} \varkappa_0 x + \sin \varkappa_0 x \operatorname{si} \varkappa_0 x \right| +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\mu(\varkappa_0+s)K_{11}^*(s) - \varkappa_0 K^*(s)}{\mu(\varkappa_0+s)K^*(s)} \cos sxds,$$

где второй интеграл уже довольно быстро сходится. Учитывая последнюю формулу, для функции $q(x)$ из (3.1) будем иметь:

$$q(x) = -\frac{\varkappa_0}{\pi} Q \left| \cos \varkappa_0 x \operatorname{ci} \varkappa_0 x + \sin \varkappa_0 x \operatorname{si} \varkappa_0 x \right| +$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (3.2)$$

$$+ \frac{\mu}{\pi} \left\{ Q \int_0^\infty \frac{\mu(\varkappa_0+s)K_{11}^*(s) - \varkappa_0 K^*(s)}{\mu(\varkappa_0+s)K^*(s)} \cos sxds - P \int_0^\infty \frac{K_{12}^{**}(s)}{K^*(s)} \sin sxds \right|$$

где $\operatorname{si} x$ и $\operatorname{ci} x$ — известные интегральный синус и косинус функции соответственно (11).

В рассматриваемом частном случае формулы же (2.2) и (2.3) переходят в следующие:

$$p(x) = \frac{2\mu P}{\pi} \int_0^\infty \frac{K(s)}{K_{11}^*(s)} \cos sxds \qquad (3.3)$$

$$(-\infty < x < \infty).$$

$$q(x) = \frac{2\mu Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{K(s)}{K_{22}^*(s)} \cos sxds \qquad (3.4)$$

Поступая с интегралом (3.4) аналогичным образом, представляем его в виде:

$$q(x) = -\frac{\varkappa_1}{\pi} Q \left| \cos \varkappa_1 x \operatorname{ci} \varkappa_1 x + \sin \varkappa_1 x \operatorname{si} \varkappa_1 x \right| +$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (3.5)$$

$$+ \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{2\mu(\varkappa_1+s)K(s) - \varkappa_1 K_{22}^*(s)}{(\varkappa_1+s)K_{22}^*(s)} \cos sxds, \quad \varkappa_1 = 4\mu\varkappa / E_1 h(2\varkappa+1).$$

Таким образом, решение контактной задачи об изгибе сосредоточенной силой P бесконечной балки на упругой, защемленной одной гранью, полосе (аналог задачи Герсеванова—Мачерета) дается интегралом (3.3), что представляет собой закон распределения нормальных контактных напряжений под балкой. Закон же распределения тангенциальных контактных напряжений под бесконечной накладкой малой толщины, сваренной с упругой полосой (аналог задачи Мелана), от горизонтальной сосредоточенной силы Q дается формулой (3.5). При этом функция $q(x)$ в последней формуле представлена в виде

$$q(x)=q_1(x)+R(x),$$

где функция

$$q_1(x)=-\frac{\varkappa_1}{\pi}Q[\cos\varkappa_1 x\,\mathrm{ci}\,\varkappa_1 x+\sin\varkappa_1 x\,\mathrm{si}\,\varkappa_1 x]$$

соответствует решению известной задачи Мелана для полуплоскости [4], а

$$R(x)=\frac{Q}{\pi}\int_0^\infty\frac{2\mu(\varkappa_1+s)K(s)-\varkappa_1 K_{22}^*(s)}{(\varkappa_1+s)K_{22}^*(s)}\cos sx\,ds$$

быстро сходящийся интеграл. Отсюда следует, что при больших x закон распределения тангенциальных контактных напряжений в обсуждаемой задаче совпадает с известным законом Мелана.

4°. Для двух частных случаев, указанных выше, исходя из формул (3.3) и (3.4) получены числовые результаты. С этой целью они представлены в виде

$$\frac{p^*(\xi)}{P}h=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{[\lambda_1(1+e^{-4k_1s_1})+(4k_1^2s_1^2+\lambda_1^2+1)e^{-2k_1s_1}]\cos s_1\xi\,ds_1}{(1-\nu_2^2)k_2s_1^3[\lambda_1(1-e^{-4k_1s_1})-4k_1s_1e^{-2k_1s_1}]/6+\lambda_1(1+e^{-4k_1s_1})+(4k_1^2s_1^2+\lambda_1^2+1)e^{-2k_1s_1}} \qquad (4.1)$$

$$\frac{q^*(\xi)}{Q}h=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{[\lambda_1(1+e^{-4k_1s_1})+(4k_1^2s_1^2+\lambda_1^2+1)e^{-2k_1s_1}]\cos s_1\xi\,ds_1}{2(1-\nu_2^2)k_2s_1[\lambda_1(1-e^{-4k_1s_1})+4k_1s_1e^{-2k_1s_1}]+\lambda_1(1+e^{-4k_1s_1})+(4k_1^2s_1^2+\lambda_1^2+1)e^{-2k_1s_1}}, \qquad (4.2)$$

где безразмерные координаты $\xi=x/h$, $s_1=hs$ и введены обозначения $p^*(\xi)=p(\xi h)$, $q^*(\xi)=q(\xi h)$, $k_1=H/h$, $k_2=E_1/E_2$, $\lambda_1=3-4\nu_2$.

Вычисления по формулам (4.1) и (4.2) проводились на ЭВМ „Наири—2". При этом за материал бесконечного стержня один раз брался латун с $E_1=0{,}8\cdot10^6$ $кг/см^2$, а другой раз бралась $E_1=1{,}2\cdot10^6$ $кг/см^2$. В обоих случаях за материал полосы брался свинец с $E_2=0{,}17\cdot10^6$ $кг/см^2$ и $\nu_2=0{,}3$. Тогда $k_2=4{,}706$ и $7{,}059$. Кроме того, было положено $k_1=5$.

Результаты вычислений приведены в табл. 1 и 2, согласно которым величины $p^*(\xi)h/P$ и $q^*(\xi)h/Q$ довольно быстро затухают. Заметим, что при $k_2=90$ и $k_1=20$ результаты вычислений по формуле (4.1) незначительно отличаются от соответствующих результатов Герсеванова—Мачерета.

$p^*(\xi)h/P$ *Таблица 1*

ξ	k_3: 4,706	k_3: 7,059
0	0,431634	0,377929
0,2	0,410279	0,362891
0,4	0,369798	0,333570
1	0,230269	0,226424
2	0,071158	0,088007
3	0,009084	0,021356

$q^*(\xi)h/Q$ *Таблица 2*

ξ	k_3: 4,706	k_3: 7,059
0,	∞	∞
0,2	0,128726	0,098751
0,5	0,096766	0,077046
1	0,073745	0,061095
6	0,020702	0,022521
12	0,010216	0,011880
18	0,005331	0,006751

Отметим, что рассмотренную здесь задачу можно обобщить на случай конечных и полубесконечных стержней, а также для анизотропных полос. Рассмотрение этих задач составит предмет последующих сообщений авторов.

В заключение авторы сердечно благодарят Н. Х. Арутюняна и С. М. Мхитаряна, любезно обративших наше внимание на важность исследования упомянутого класса задач и сделавших ряд конкретных ценных указаний и замечаний по этой статье.

Ереванский государственный университет

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ռ. Դ. ԱՎԱՆԵՍՅԱՆ

Անվերջ վերադիրով ուժեղացված առաձգական շերտի համար մի կոնտակտային խնդրի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է անվերջ վերադրից մի նիստով ամրակցված առաձգական շերտին ուժի փոխանցման հարթ կոնտակտային խնդիրը։ Խնդրի լուծումը բերվում է անհայտ կոնտակտային լարումների նկատմամբ ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծմանը։ Վերջինիս լուծումը կառուցվում է Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ։ Հետազոտված են կոնտակտային լարումների փոփոխման օրինաչափությունները, որոնց համար երկու մասնավոր դեպքերում բերված են թվային աղյուսակներ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 39, вып. 5 (1975). [2] *А. Б. Ефимов, Б. И. Малый, Н. М. Толкачева*, «Известия АН СССР», МТТ, № 1, 1969. [3] *Н. М. Герсеванов, Я. А. Мачерет*, «Гидротехническое строительство», № 10, 1935 и Сб. НИС «Фундаментстрой» № 8 1937. [4] *E. Melan* Ingr—Arch., Bd 3, Nr. 2, s 123—129 (1932). [5] *М. И. Горбунов-Посадов*, Балки и плиты на упругом основании, Машстройиздат, М., 1949. [6] *Б. Г. Коренев*, Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. Госстройиздат, М., 1954. [7] *Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын*. Практические методы расчета фундаментальных балок и плит на упругом основании (без гипотезы Винклера). Госстройиздат, М., 1947. [8] *В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев*, Балки, плиты и оболочки на упругом основании. Физматгиз, М., 1960. [9] *В. А. Флорин*, Основы механики грунтов, т. I, Госстройиздат, М.—Л., 1961. [10] *И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко*, Неклассические смешанные задачи теории упругости, Изд. «Наука», М., 1974. [11] *И. С. Градштейн и И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Изд. «Наука», М., 1971.