LXIV 1977 1

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян

Системы $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ в случае „быстрого“ обслуживания

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 7/IV 1976)

1. Пусть в одноканальную систему обслуживания поступают r независимых пуассоновских потока вызовов. Параметр l-го потока $(l=\overline{1,r})$ равен $a_l>0$. Длительности обслуживания независимы между собой и не зависят от процесса поступления. Длительности обслуживания вызовов l-го потока (l-вызовов) имеют функцию распределения (ф. р.) $B_l(t)$, $B_l(0)=0$.

Рассматривается система с ожиданием.

Мы ограничимся рассмотрением класса систем обслуживания без прерывания уже начатого обслуживания, у которых случайные вектора $\zeta_n=(\xi_1^{(n)},\ldots\xi_r^{(n)};i)$, где $\xi_j^{(n)}$ — число j-вызовов, оставшихся в системе после окончания обслуживания n-го вызова, являющегося i-вызовом, образуют простую цепь Маркова.

Пусть $a_1+\ldots+a_r=1$ и η_l — случайная длительность обслуживания l-вызова. Случайная величина η равна η_l с вероятностью a_l.

Нас интересует асимптотическое распределение длины очереди указанного класса систем в случае „быстрого“ обслуживания; т. е. когда при любом $t>0$ $\sum\limits_{l=1}^{r} a_l B_l(t)\to 1$. Это условие эквивалентно как условию $\sum\limits_{l=1}^{r} a_l\beta_l(s)\to 1$, где $\beta_l(s)=\int e^{-st}\,dB_l(t)$ $(\operatorname{Re} s\geqslant 0)$, так и условию $\eta\xrightarrow{P}0$.

Методы исследования систем надёжности и массового обслуживания в случае „быстрого“ обслуживания разработаны А. Д. Соловьёвым [1].

2. Пусть $p_{i_n}^{*}(\vec{k};t)$ — вероятность того, что n-ый обслуженный вызов является i-вызовом, после себя оставляет очередь типа $\vec{k}=(k_1,\ldots,k_r)$, а момент окончания обслуживания n-го вызова не превосходит t. (k_l—число l-вызовов).

Введем обозначения ($\operatorname{Re} s \geq 0$; $i = \overline{1,r}$; $n \geq 0$).

$$p_{in}(\vec{k}; s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dp_{in}^*(\vec{k}, t); \quad p_n(\vec{k}; s) = \sum_{i=1}^{r} p_{in}(\vec{k}; s); \tag{1}$$

$$b_{in}(s) = \int_0^\infty e^{-(s+1)x} \frac{x^n}{n!} [1 - B_i(x)]\, dx; \quad \beta_{in}(s) = \int_0^\infty e^{-(s+1)x} \frac{x^n}{n!} dB_i(x).$$

При целых $n \geq 1$

$$\beta_i(s+1) = \beta_{i0}(s) = 1 - (s+1)\, b_{i0}(s),$$
$$\beta_{in}(s) = b_{in-1}(s) - (s+1)\, b_{in}(s), \tag{2}$$

откуда

$$b_{in}(s) = (s+1)^{-1} \left\{ (s+1)^{-n} - \sum_{j=0}^{n} (s+1)^{j-n} \beta_{ij}(s) \right\}. \tag{3}$$

Полезна также следующая форма записи (3), непосредственно вытекающая из вероятностных соображений ($n \geq 1$)

$$b_{in-1}(s) = \sum_{j \geq n} \beta_{ij}(s) \cdot (s+1)^{j-n}. \tag{4}$$

Из (2) имеем

$$\frac{1 - \beta_i(s+1)}{s+1} = b_{i0}(s) > (s+1)\, b_{i1}(s) > \ldots > (s+1)^n b_{in}(s) > \ldots \tag{5}$$

Нетрудно доказать на основе (5), что $a_i \beta_{in}(s) \to 0$.

3. Лемма. *Пусть n, c, $k_1, \ldots, k_c$ — целые числа; $k_1 + \ldots + k_c = n$ и*

$$a_i \beta_{in+1}(s) = O(a_j \beta_{jn+1}(s)). \tag{6}$$

Тогда

а) при любом j ($j = \overline{1,r}$), неотрицательных $k_1, \ldots, k_c$ и $n \geq 1$

$$\lim_{\substack{p \\ \eta \to 0}} \frac{\beta_{i_1 k_1+1}(s) \ldots \beta_{i_c k_c+1}(s)}{\beta_{i_n n+1}(s)} \cdot \frac{a_{i_1} \ldots a_{i_c}}{a_{i_n}} = 0; \tag{7}$$

б) при любом j ($j = \overline{1,r}$), положительных $k_1, \ldots, k_c$ и $n \geq 1$

$$\lim_{\substack{p \\ \eta \to 0}} \frac{\beta_{i_1 k_1+1}(s) \ldots \beta_{i_{c-1} k_{c-1}+1}(s) \cdot b_{i_c k_c}(s)}{b_{i_n n}(s)} \cdot \frac{a_{i_1} \ldots a_{i_c}}{a_{i_n}} = 0. \tag{8}$$

Здесь $i_1, \ldots, i_c, i_n = \overline{1,r}$.

Доказательство. Докажем утверждение а). При фиксированном $s \geq 0$

$$G(t, s) = \frac{\int_0^t e^{-sx} x\, d\left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i B_i(x) \right\}}{\int_0^\infty e^{-sx} x\, d\left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i B_i(x) \right\}}$$

является ф. р.. Следовательно, $\bar{\rho}_k(s) = \int_0^\infty t^{k-1} d_t\, G(t, s)$ ($k > 1$; $s \geq 0$)

служит $(k-1)$-ым моментом для ф. р. $G(t, s)$ и

$$\bar{\rho}_k(s) = \frac{k!\rho_k(s)}{\rho_1(s)} \qquad (k > 1;\ s \geqslant 1), \tag{9}$$

где обозначено $\rho_k(s) = \sum_{j=1}^{r} a_j \beta_{jk}(s-1)$.

К моментам $\rho_k(s)$ применим неравенство моментов

$$\rho_{k_i+1}(s) \leqslant [\bar{\rho}_{n+1}(s)]^{k_i/n} \qquad (k_i > 0;\ i = \overline{1, c})$$

и перемножим полученные выражения: $\bar{\rho}_{k_1+1}(s) \ldots \bar{\rho}_{k_c+1}(s) \leqslant \bar{\rho}_{n+1}(s)$. Следовательно, имея в виду (9), находим $(s \geqslant 1)$

$$\frac{\rho_{k_1+1}(s) \ldots \rho_{k_c+1}(s)}{\rho_{n+1}(s)} \leqslant \frac{(n+1)!}{(k_1+1)! \ldots (k_c+1)!} [\rho_1(s)]^{c-1} \to 0. \tag{10}$$

Подставим в (10) значения $\rho_{k_{i+1}}(s)$. В получаемом выражении, вследствие неотрицательности слагаемых и (10), каждое из слагаемых стремится к нулю, что и т. д.

Для доказательства утверждения б) аналогично (7) устанавливается

$$\lim_{\substack{\rho \\ \eta \to 0}} \frac{b_{i_1k_1}(s) \ldots b_{i_ck_c}(s)}{b_{i_nn}(s)} \cdot \frac{a_{i_1} \ldots a_{i_c}}{a_{i_n}} = 0.$$

В числитель левой части последнего выражения подставляем вместо $b_{i_1k_1}(s), \ldots, b_{i_{c-1}k_{c-1}}(s)$ их значения по (4)

$$\sum_{j_1=k_1+1}^{r} \cdots \sum_{j_{c-1}=k_{c-1}+1}^{r} \lim_{\substack{\rho \\ \eta \to 0}} \frac{\beta_{i_1j_1}(s) \ldots \beta_{i_{c-1}j_{c-1}}(s)\, b_{i_ck_c}(s)}{b_{i_nn}(s)} \cdot \frac{a_{i_1} \ldots a_{i_c}}{a_{i_n}}$$

и в виду неотрицательности слагаемых получаем (8).

Фактически мы доказали большее, чем требовалось. Лемма доказана не только при $k_1 + \ldots + k_c = n$, но и при $k_1 + \ldots + k_c > n$.

4. Положим

$$T(\vec{k};\ \vec{a}) = \frac{(|\vec{k}|)!}{k_1! \ldots k_r!} a_1^{k_1} \ldots a_r^{k_r}. \tag{11}$$

Обозначим через $\pi_{\geqslant n}$ период занятости, за который обслужено не менее n вызовов.

Пусть $\hat{P}(\vec{k};\ \vec{\alpha})$ $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n-1)$ — вероятность того, что за длительность обслуживания первого обслуженного за $\pi_{\geqslant n}$ вызова из поступивших $(k_1 + \alpha_1)$ 1-вызовов, ..., $(k_r + \alpha_r)$ r-вызовов к числу следующих обслуженных за $\pi_{\geqslant n}$ $n-1$ штук вызовов относятся α_1 1-вызовов, ..., α_r r-вызовов, при условии, что за длительность обслуживания первого вызова поступило $|\vec{k}| + n - 1$ штук вызовов.

Очевидно, что условная вероятность $\hat{P}(\vec{k};\ \vec{\alpha})$ однозначно определяется дисциплиной обслуживания.

Теорема. *При* $\tau_i \xrightarrow{P} 0$ *вероятность* $p_{in}(\vec{k};\ s)$ *представима в виде*

$$p_{in}(\vec{k},\ s)=\Big[(1+s)^{-n}\ a_i\beta_{i|\vec{k}|}(s)\ T(\vec{k};\ \vec{a})+$$

$$+\sum_{j=2}^{n}(1+s)^{j-n-1}\beta_{|\vec{k}|+j-1}(s)\sum\nolimits_i T(\vec{k}+\vec{a}_j;\ \vec{a})\ \hat{p}(\vec{k};\ \vec{a}_j)\Big](1+0(1)). \qquad (12)$$

Здесь $\vec{a}_j=(a_{1j},\ldots,a_{rj})$; $a_{mj}\geqslant 0$; $m=\overline{1,r}$; $m\neq i$; $a_{ij}\geqslant 1$; $j=\overline{2,n}$ *и суммирование производится по всем* $\vec{a}_j$, *для которых* $|\vec{a}_j|=j-1$. *Индекс* i *справа от* $\sum$ *указывает на зависимость суммы от* i.

Доказательство. а) Выясним порядок функции $p_n(\vec{0};s)=\sum_{i=1}^{r}p_{in}(\vec{0};s)$ при $\tau_i \xrightarrow{P} 0$, где $\vec{0}=(0,\ldots,0)$. Воспользуемся приемом введения дополнительного события ([2]). Пусть $\Phi(z,\ s)$ — вероятность того, что за период занятости нет „катастроф" и обслужены лишь красные вызовы. Известно ([2])

$$\Phi(z,\ s)=z\sum_{i=1}^{r}a_i\beta_i(s+1-\Phi(z,\ s)). \qquad (13)$$

Имеет место соотношение

$$p_n(\vec{0};\ s)=(s+1)^{-1}\ \pi(n,\ s)+(s+1)^{-2}\sum_{i=1}^{n-1}\pi(i,\ s)\ \pi(n-i,\ s)+\ldots+$$

$$(s+1)^{-n}[\pi(1,\ s)]^n,$$

где $\pi(n,\ s)$ — вероятность того, что за период занятости нет „катастроф" и обслужено ровно n штук вызовов. Так как $\sum_{n\geq 1}\pi(n,\ s)y^n=\Phi(y,\ s)$, то

$$\sum_{n\geq 1}p_n(\vec{0};\ s)y^n=\frac{\Phi(y,\ s)}{s+1-\Phi(y,s)}\ \ (|y|\leqslant 1;\ \operatorname{Re}s>0). \qquad (14)$$

Из формул (13), (14) путем несложных преобразований находим разложение

$$\sum_{n\geq 1}p_n(\vec{0};\ s)y^n=[1-0(1)]\sum_{n\geq 1}\left(\frac{y}{s+1}\right)^n.$$

Следовательно, при $\tau_i \xrightarrow{P} 0$

$$p_n(\vec{0};\ s)=(s+1)^{-n}\left\{1-0(1)\right\} \qquad (\operatorname{Re}s>0,\ n\geqslant 1) \qquad (15)$$

б) Обозначим через $q^{\circ}_{in}(\vec{k};\ t)$ вероятность того, что n-ым обслуживается i-вызов; оставляет после себя очередь типа $\vec{k}=(k_1,\ldots,k_r)$; момент окончания обслуживания этого i-вызова не превосходит t; первый период занятости не закончился.

Положим

$$q_{in}(\vec{k};\ s)=\int_0^\infty e^{-st}\, d_t\, q_{in}^{*}(\vec{k};\ t).$$

Очевидны соотношения ($i=\overline{1,r}$; $|\vec{k}|>0$; $n>1$; $\operatorname{Re} s\geqslant 0$)

$$p_{i1}(\vec{k};\ s)=q_{i1}(\vec{k};\ s),$$
$$p_{in}(\vec{k};\ s)=q_{in}(\vec{k};\ s)+\sum_{j=1}^{n-1} p_j(\vec{0};\ s)\ q_{in-j}(\vec{k};\ s). \tag{16}$$

в) Найдём удобные для нас выражения, определяющие $q_{in}(\vec{k};\ s)$. События $A_j^m(s)$ и B_{ij} определяются внутри отдельно взятого периода занятости $\pi_{>n}$ ($j=\overline{1,n}$; $i=\overline{1,r}$; $m\geqslant 0$). $A_j^m(s)$ — событие, заключающееся в том, что j-ым обслуживается вызов, за длительность обслуживания которого поступило m штук вызовов и не наступали „катастрофы". B_{ij} — событие, заключающееся в том, что j-ым обслуживается i-вызов.

Поскольку

$$P\left\{A_l^{m_l}(s)/B_{i_l l}\bigcap_{j=1}^{l-1}(B_{i_j j}\ A_j^{m_j}(s)\right\}=\beta_{i_l m_l}(s),$$

($P(A/B)$ — условная вероятность события A при условии осуществления события B и $\bigcap_{j=1}^{0}\equiv$ {достоверное событие}), то по формуле полной вероятности

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}(B_{i_j j}\,A_j^{m}(s))\right\}=\prod_{l=1}^{n}P\left\{B_{i_l l}/\bigcap_{j=1}^{l-1}(B_{i_j j}\,A_j^{m_j}(s))\right\}\beta_{i_l m_l}(s). \tag{17}$$

Пусть k-ый поступивший за $\pi_{>n}$, отсчитываемый в порядке поступления вызов (учитывается и тот, с которого начался период занятости $\pi_{>n}$), является p_k — вызовом ($k\geqslant 1$; $P_k=\overline{1,r}$).

Положим $\vec{m}=(m_1,\ldots,m_n)$, $|\vec{m}|=m_1+\ldots+m_n$, $\vec{p}=(p_1,\ldots,p_{|\vec{m}|+1})$. Пусть m_j — число вызовов, поступивших за время обслуживания j-го вызова.

Пара векторов $(\vec{m};\vec{p})$ однозначно задает последовательность поступлений вызовов с указанием числа поступлений за времена обслуживаний первых n обслуженных внутри $\pi_{>n}$ вызовов, т. е. задает некоторый путь.

Пусть $P(\vec{m};\ \vec{p})$ — вероятность пути $(\vec{m};\ \vec{p})$, а $\Gamma(\vec{m};\ n)$ — множество всех путей.

На основании (17) получаем (n и $\vec{m}$ фиксированы)

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}\left(B_{i_j l} A_j^{m_j}(s)\right)\right\}+\frac{1}{s+1}\left(\prod_{l=1}^{n}\beta_{i_l m_l}(s)\right)\sum P(\vec{m};\vec{p}), \qquad (18)$$

где суммирование производится по некоторому подмножеству $\Gamma_1(\vec{m};\vec{i})$, $\vec{i}=(i_1,\ldots,i_n)$, (всех допустимых путей) множества $\Gamma(\vec{m};n)$.

Так как для каждого допустимого пути

$$P(\vec{m};\vec{p})=P\left\{\bigcap_{j=1}^{n} A_j^{m_j}(0)\right\}\cdot\left(\prod_{l=1}^{|\vec{m}|+1} a_{p_l}\right)$$

и $\prod_{l=1}^{n} a_{il}$ содержится как сомножитель второго сомножителя правой стороны последнего равенства, то

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}\left(B_{i_j l} A_j^{m_j}(s)\right)\right\}=\frac{1}{s+1}a_{i_1}\beta_{i_1 m_1}(s)\ldots a_{i_n}\beta_{i_n m_n}(s)D(\vec{m};\vec{i}), \qquad (19)$$

где $D(\vec{m};\vec{i})$ не превосходит мощности множества $\Gamma_1(\vec{m};\vec{i})$.

г) Перейдем непосредственно к асимптотике $q_{in}(\vec{k};s)$. Если $R(\vec{k};n)=\bigcup\Gamma_1(\vec{m};\vec{i})$, где объединение множеств производится по таким $(\vec{m};\vec{i})$, что $|\vec{m}|=|\vec{k}|+n-1$, то из (19) имеем

$$q_{in}(\vec{k};s)=\sum a_{i_1}\beta_{i_1 m_1}(s)\ldots a_{i_{n-1}}\beta_{i_{n-1} m_{n-1}}(s)\,a_i\,\beta_{i m_n}(s)\cdot D(\vec{m};\vec{i})\,\frac{1}{s+1}. \qquad (20)$$

В (20) суммируем по всем путям из $R(\vec{k};n)$. Заметим, что при фиксированных n и $\vec{k}$ мощность $\Phi(\vec{k};n)$ множества $R(\vec{k};n)$ конечна.

В частности, из (18) $(n>1)$

$$\sum_{i_1=1}^{r}\ldots\sum_{i_{n-1}=1}^{r} P\left\{B_{i_1 1}A_1^{|\vec{m}|+n-1}(s)\quad\bigcap_{j=2}^{n}B_{i_j j}\;A_j^0(s)\right\}=$$

$$=\frac{1}{s+1}\sum\beta_{i_1|\vec{m}|+n-1}(s)\;\beta_{i_2 0}(s)\ldots\beta_{i_{n-1}0}(s)\beta_{i0}(s)\hat{P}\;(\vec{k};\;\vec{a})\;T\;(\vec{k}+\vec{a};\;\vec{a}). \qquad (21)$$

Здесь в последовательности $i_1,\ldots,i_{n-1}$, i 1 встречается a_1 раз, ..., r a_r раз. Сомножители в сумме правой части (20) вида $a_{i_j}\beta_{i_j m_j}(s)$, у которых $m_j=0$ имеют порядок $a_{i_j}+o(a_{i_j})(j=\overline{1,n};\ i_n=i;\ i_j=\overline{1,r})$.

Возьмем произвольное слагаемое правой части (20) без сомножителей $D(\vec{m};\vec{i})$ и таких $a_{i_j}\beta_{i_j}m_j(s)$, у которых $m_j=0$. Тогда на основании пункта а) леммы при выполнении (6) и $\eta\xrightarrow{p}0$ имеем

$$a_{i_1}\beta_{i_1 m_1}(s)\ldots a_{i_l}\beta_{i_l m_l}(s)=o(\,a_{i_1}\ldots a_{i_l}\,\beta_{i_p|\vec{k}|+n-1}(s), \qquad (22)$$

где $p=\overline{1,l}$; $l\leq n$; $m_1+\ldots+m_l=|\vec{k}|+n-1$, причем для удобства запии перенумерацией индексов достигается $m_j > 0$ $(j=\overline{1,l})$, $m_j=0$ $(j=\overline{l+1,\,n})$.

Следовательно, при $\eta_i \xrightarrow{p} 0$ главный член асимптотики (20) содержится в слагаемых вида

$$a_{i_1}\beta_{i_1|\vec{k}|+n-1}(s)\cdot a_{i_2}\beta_{i_2 0}(s)\ldots a_{i_{n-1}}\beta_{i_{n-1}0}(s)a_l\beta_{l0}(s)D(|\vec{k}|+n-1,\,0,\ldots,0;\ i_1,\ldots,i_{n-1},\,l).$$

Наконец, вспоминая (21), (22) заключаем $(n>1)$

$$q_{ln}(\vec{k};s)=(s+1)^{-1}\rho_{|\vec{k}|+n-1}(s)\textstyle\sum_l T(\vec{k}+\vec{\alpha};\,\vec{a})\hat{P}(\vec{k};\,\vec{\alpha})[1+O(1)]\quad(\eta\xrightarrow{p}0). \tag{23}$$

Индекс l справа от $\sum$ призван указать зависимость суммы от l. В правой части (23) суммирование производится по всем $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$, $\alpha_j\geqslant 0$; $j=\overline{1,r}$; $j\neq l$; $\alpha_l\geqslant 1$ $\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n-1$.

Далее $(|\vec{k}|>0;\ Re\,s\geqslant 0\ l=\overline{1,r})$

$$q_{l1}(\vec{k};s)=(s+1)^{-1}a_l\,\beta_{l|\vec{k}|}\quad T(\vec{k};\vec{a}). \tag{24}$$

д) Собрав воедино (11), (16), (23), (24), убеждаемся в справедливости теоремы в случае

$$a_l\,\beta_{l|\vec{k}|}(s)=O(\rho_{|\vec{k}|}(s))\quad(\eta_l\xrightarrow{p}0). \tag{25}$$

Просмотрев наши рассуждения, начиная с доказательства леммы, просто заметить, что в случае

$$a_l\,\beta_{l\,|\vec{k}|}(s)=O(\rho_{|\vec{k}|}(s))\quad(\eta\xrightarrow{p}). \tag{26}$$

главный член асимптотики $g_{ln}(\vec{k};s)$ $(n>1)$ опять содержится в слагаемых вида (21).

Далее, так как функция $q_{l1}(\vec{k},s)$, возможно, входит в главный член асимптотики $p_{ln}(\vec{k};s)$, будучи помноженной на $p_{n-1}(\vec{0};s)$, то оба случая (25) и (26) приводят к одному и тому же результату.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Է. Ս. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

$\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ տիպի սիստեմների «արագ» սպասարկման դեպքում

Հետազոտվում է զանգվածային սպասարկման $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ տիպի սիստեմների դասը։ Հերթի երկարության վեկտորները դիտարկվում են պահանջների սպասարկման ավարտի մոմենտներին։ Այդ պահանջների տիպի համարները կցված են հերթի երկարության վեկտորներին և կազմում են նոր

վեկտորներ։ Ենթադրվում է, որ այդ նոր վեկտորները կազմում են հասարակ մարկովյան շղթա։

Քանի որ սիստեմների հիմնական բնութագրիչներից շատերը միարժեք ձևով որոշվում են հերթի երկարության բաշխմամբ, ապա աշխատանքի հիմնական նպատակն է հանդիսանում հերթի երկարության բաշխման ասիմպտոտիկ ուսումնասիրությունը արագ սպասարկման դեպքում։

Հերթի երկարության վերաբերյալ ապացուցված թեորեմը արագ սպասարկման դեպքում թույլ է տալիս հանգել մի շարք օգտակար հետևանքների։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Д. Соловьев.* Докторская диссертации, МГУ, М., 1970. [2] *Б. В. Гнеденко, Э. А. Даниелян и др.* Приоритетные ситемы обслуживания, МГУ, М., 1973