

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Е. Маркосян, И. А. Карапетян

О совершенных графах

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 9/XI 1976)

В настоящей работе установлено одно важное свойство о критических множествах и ребрах, которое является обобщением теоремы доказанной Байнеке - Харари-Пламмером ⁽¹⁾, и с его помощью доказана гипотеза Олару ⁽²⁾: если в графе G каждый цикл нечетной длины имеет по крайней мере две диагонали, то граф G — совершенный. В конце сформулировано утверждение, равносильное гипотезе Бержа.

Мы будем рассматривать обыкновенные графы.

Пусть $G=(X, U)$ некоторый граф, а $\alpha(G)$, $\sigma(G)$ и $\varphi(G)$, соответственно, число внутренней устойчивости (наибольшее число попарно несмежных вершин), кликоматическое число (наименьшее число клик, покрывающих все вершины графа G) и плотность (число вершин наибольшей клики) графа G .

Напомним следующие известные определения.

Граф G имеет α -покрытие, если $\alpha(G)=\tau(G)$. Граф G называется совершенным, если каждый порожденный подграф графа G имеет α -покрытие. Нечетной дыркой в графе G назовем простой цикл нечетной длины без диагоналей.

Относительно совершенных графов Берж ⁽³⁾ выдвинул следующие две гипотезы:

1) дополнение совершенного графа является совершенным графом;

2) граф G совершенный тогда и только тогда, когда ни G , ни его дополненное $\bar{G}$ не содержат нечетных дырок длины > 5 .

Ловац ⁽⁴⁾ доказал, что граф G является совершенным тогда и только тогда, когда для любого порожденного подграфа G' графа G .

$$\alpha(G') + \varphi(G') \geq |G'|,$$

где $|G'|$ число вершин графа G' .

Этот результат сильнее первой, но слабее второй гипотез Бержа.

Введем следующие определения и обозначения.

Ребро $u=(x, y)$ графа G назовем критическим, если $\alpha(G \setminus u) > \alpha(G)$.

Множество ребер $U' \subseteq U$ графа G назовем критическим, если $\alpha(G \setminus U') > \alpha(G)$. Реберно-критической компонентой графа G , называется максимальный подграф H графа G , в котором для любой пары вершин существует цепь, состоящая только из критических ребер.

Пусть $\Gamma_x = \{y \in X / (x, y) \in U\}$,

$$U_x = \{u \in U / u = (x, y), y \in X\},$$

где x произвольная вершина графа $G=(X, U)$.

Очевидно, что если граф G имеет α -покрытие, то все его реберно-критические компоненты являются полными. Из справедливости второй гипотезы Бержа непосредственно следует: если граф и его дополнение не содержат нечетных дырок длины ≥ 5 , то его реберно-критические компоненты являются полными подграфами ⁽³⁾. Легко заметить, что последнее утверждение является более слабой гипотезой, чем вторая гипотеза и вполне естественно попробовать решить эту гипотезу.

Пусть S_1 и S_2 произвольные наибольшие внутренние устойчивые множества графа G . Обозначим через $G_{1,2}$ подграф графа G , порожденный подмножеством вершин $S_1 \cup S_2$, а его компоненты связности через $G_{1,2}^i$, где $i \geq 1$. В работе ⁽³⁾ доказана следующая

Лемма 1. $|G_{1,2}^i \cap S_1| = |G_{1,2}^i \cap S_2|$ для любого $i \geq 1$.

Лемма 2. Если $U^1 \subseteq U_x$, $U^2 \subseteq U_x$, $U^1 \subseteq U^2$, $U^2 \subseteq U'$ и U^1 , U^2 — критическое множество графа G , причем $U^1 \cap U^2$ не является критическим множеством, то существуют ребра $u_1 \in U^1 \setminus U^2$ и $u_2 \in U^2 \setminus U^1$, через которые проходит нечетная дырка.

Доказательство. Так как $U^1 \cup U^2$ — критическое множество для G , то существует наибольшее внутренне устойчивое множество $S_1(S_2)$, такое что $S_1 \cup \{x\}$ ($S_2 \cup \{x\}$) является внутренне устойчивым множеством для графа $G \setminus U'$ ($G \setminus U^2$). Пусть $\Gamma_i = S_i \cap \Gamma_x$, $i=1, 2$. Рассмотрим граф $G_{1,2}$. Пусть $z \in \Gamma_i$, $i \in 1, 2$. Через $G_{1,2}^{(z)}$ обозначим компоненту графа $G_{1,2}$, содержащую вершину z . Докажем, что существует $x_0 \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$ и $y_0 \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$ такие, что $G_{1,2}^{(x_0)} = G_{1,2}^{(y_0)}$. Предположим, что не так. Тогда пользуясь леммой 1, легко убедиться, что

$$S = \left(\bigcup_{x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} G_{1,2}^{(x)} \cap S_2 \right) \cup \left[S_1 \setminus \left(\bigcup_{x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_1} G_{1,2}^{(x)} \cap S_1 \right) \right]$$

является внутренне устойчивым множеством графа G мощности $\alpha(G)$.

Из определения S следует, что вершина x смежна лишь с вершинами $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap S_1$.

Пусть $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Тогда $S^1 = S \cup \{x\}$ будет внутренне устойчивым множеством и $|S^1| > |S|$, что противоречит выбору S_1 . Если $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$, тогда $U^1 \cap U^2$ является критическим множеством графа G , что противоречит условию леммы.

Так как $G_{1,2}^{(x_0)} \equiv G_{1,2}^{(y_0)}$, то существует простая цепь, соединяющая x_0 и y_0 и состоящая поочередно из вершин множеств S_1 и S_2 . Пусть C кратчайшая цепь с указанным свойством. Рассмотрим подцепь C_0 цепи C наименьшей длины и такую, что один конец $s_1 \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$, а другой конец $s_2 \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$. Цепь C_0 с ребрами (x, s_1) , (x, s_2) , составляет нечетную дырку, что завершает доказательство леммы.

Следствие 1. (Обобщение теоремы Байнеке, Харари и Пламаера ⁽¹⁾) Через любые пары смежных критических ребер проходит нечетная дырка.

Следствие 2. Если $U^1 \subset U_x$, $U^2 \subset U_x$, $U^1 \neq U^2$ — минимальные критические множества для графа G , то существуют ребра $u_1 \in U^1 \setminus U^2$ и $u_2 \in U^2 \setminus U^1$, через которые проходит нечетная дырка.

Следствие 3. Если $U^1 \subset U_x$, $U^2 \subset U_x$ — такие критические множества, что для любых $U' \subset U^1$ и $U'' \subset U^2$ объединение $U' \cup U''$ не является критическим множеством, то существуют ребра $u_1 \in U^1 \setminus U^2$ и $u_2 \in U^2 \setminus U^1$ через которые проходит нечетная дырка.

Лемма 3. Если в графе G все циклы нечетные длины имеют по крайней мере две диагонали и в некотором цикле μ нечетным длинны диагонали выходят только из вершины x , то x смежна со всеми вершинами цикла μ .

Лемма легко доказывается по индукции.

Прежде чем перейти к доказательству основной теоремы напомним, что граф G называется критически несовершенным, если $\alpha(G) < \alpha(G')$, но $\alpha(G') = \alpha(G')$, для любого порожденного подграфа G' графа G и заметим, что из теоремы 3.11 работы ⁽⁶⁾ следует:

Следствие а. В критически несовершенном графе G , для любой наибольшей клики Q графа G существует только одно непересекающееся с Q наибольшее внутренне устойчивое множество.

Следствие б. Для любой вершины x критически несовершенного графа G существуют ровно $\alpha(G)$ различных наибольших внутренне устойчивых множеств содержащих вершину x .

Теорема 1. Граф, каждый цикл нечетный длины которого имеет по крайней мере две диагонали, совершенный.

Доказательство. Пусть теорема не верна. Тогда существует критически несовершенный граф G , удовлетворяющий условиям теоремы. Пусть Q — некоторая наибольшая клика в графе G . Тогда по следствию а, существует ровно одно наибольшее внутренне устойчивое множество S , такое, что $S \cap Q = \emptyset$. Пусть x — произвольная вершина из Q . Очевидно, что $N = \Gamma_x \cap S \neq \emptyset$. Обозначим через s_0 ту вершину из множества N , для которой выполняется равенство

$$|\Gamma_{s_0} \cap Q| = \max_{z \in N} |\Gamma_z \cap Q|.$$

Ясно, что существует вершина z , принадлежащая Q и не смежная с s_0 . Согласно следствию б существует наибольшее внутренне устойчивое множество S' графа G , содержащее вершину z , но не содержа-

щее вершину s_0 . Обозначим через $M = \Gamma_x \cap S'$. Рассмотрим граф G' , который получается из G удалением всех ребер вида (x, y) , где $y \in (N \setminus \{s_0\}) \cup (M \setminus \{z\})$. Докажем, что $\alpha(G') = \alpha(G)$. Пусть это не так. Тогда существует внутренне устойчивое множество S'' в графе G' , такое, что $|S''| > \alpha(G)$. Ясно, что $S'' \cap Q = \{x\}$ и $s_0 \notin S''$. Но тогда $S'' \setminus \{x\}$ будет наибольшим внутренне устойчивым множеством в графе G , отличным от S и непересекающимся с Q , что противоречит следствию a .

Теперь легко заметить, что ребра (x, s_0) и (x, z) являются критическими в графе G' . Согласно следствию 1 существует нечетная дырка $\mu = (x, z, x_1, \dots, x_{2k}, s_0)$, проходящая через эти ребра, все вершины которой, отличные от x , принадлежат множеству $S \cup S'$. μ будет простым циклом нечетной длины в графе G , диагонали которого выходят только из вершины x . Следовательно, по лемме 3 вершина x смежна со всеми вершинами цикла μ . Легко заметить, что $x_1 \in N$. По выбору s_0 существует вершина $y \in \Gamma_{s_0} \cap Q$, несмежная с x_1 . Тогда $\mu' = (y, z, x_1, \dots, x_{2k}, s_0)$ будет простым циклом нечетной длины в графе G , все диагонали которого выходят из вершины y . Вновь, согласно лемме 3, вершина y смежна со всеми вершинами цикла μ' , что противоречит выбору y . Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие (Теорема Олару ⁽²⁾). Если каждый простой цикл нечетной длины графа G имеет по крайней мере пару пересекающихся диагоналей, то G — совершенный.

Заметим, что если каждый цикл нечетной длины графа G имеет по крайней мере две диагонали, то G удовлетворяет условиям второй гипотезы Бержа.

Дадим определение понятия критической компоненты, которое является обобщением реберно-критической компоненты, и с его помощью сформулируем необходимое и достаточное условие для совершенных графов, а также утверждение, равносильное второй гипотезе Бержа.

Пару вершин x и y графа G назовем критической, если разрез U_A , определенный произвольным множеством A , где $x \in A$, $y \notin A$ является критическим. Максимальный подграф, у которого любая пара вершин критическая, назовем критической компонентой. Ребро $u = (x, y)$ назовем существенным, если при любом α -покрытии x и y принадлежат одному и тому же полному подграфу т. е. $\alpha(G \setminus u) > \alpha(G)$.

Существенной компонентой будем называть максимальный подграф у которого любые две вершины связаны цепью, составленной из существенных ребер.

Легко доказать следующие теоремы:

Теорема 2. В совершенном графе критические и существенные компоненты совпадают.

Теорема 3. Граф совершенный тогда и только тогда, когда критические компоненты любого подграфа полные.

Заметим, что аналогичное утверждение не верно для реберно-

критических компонент. Из теоремы 3 следует, что вторая гипотеза Бержа равносильна следующему утверждению:

Если граф G и его дополнение не содержат нечетных дырок и G является критической компонентой, то G — полный граф.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Ն. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ, Ի. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Կատարյալ գրաֆիկների մասին

Դիցուք $G = (X, U)$ սովորական գրաֆ է, իսկ $\alpha(G)$ և $\sigma(G)$, համապատասխանաբար, G գրաֆի ներքին կալունություն (ամենամեծ թվով դուրս գալիս իրար ոչ կից գագաթների քանակը) և ծածկույթի (G գրաֆի բոլոր գագաթները ծածկող ամենափոքր թվով լրիվ ենթագրաֆների քանակը) թվերն են: Կասենք, որ G գրաֆն ունի α -ծածկույթ, եթե $\alpha(G) = \sigma(G)$, G գրաֆը կոչվում է կատարյալ, եթե G գրաֆի յուրաքանչյուր ծնված ենթագրաֆն ունի α -ծածկույթ:

Հոդվածում բացահայտված են կրիտիկական բազմությունների և կողերի մի քանի կարևոր հատկություններ, որոնք հանդիսանում են Բալենկե-Խարարի-Պլամերի կողմից ապացուցված թեորեմի ընդհանրացումներ և որոնց օգնությամբ ապացուցված է Օլարուի հիպոթեզը:

Եթե G գրաֆի կենտ երկարությամբ յուրաքանչյուր ցիկլ ունի առնվազն երկու անկյունագծեր, ապա այն կատարյալ է: Հոդվածի վերջում ձևակերպված է Բերդի երկրորդ հիպոթեզին համարվեք պնդում:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ I. Beineke, F. Haray, M. Plummer, Pacific J. Math., 22 (1967). ² E. Olaru, Elektronische Informationsverarbeitung und Kyberetik, EIK 8, 2/3 (1972). ³ C. Berge, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe, 114 (1961). ⁴ L. A. Lovasz, J. Comb. Theory, v. 13, № 2 (1972). ⁵ С. Е. Маркосян, ИАН Арм. ССР, т. 60, № 4 (1975). ⁶ M. Padberg, Math. Programming 6 (1974).