ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 5

УДК 517

МАТЕМАТИКА

В. М. Елигарян

Комплексное обращение обобщенного преобразования типа свертки

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 15/IX 1976)

Хиршманом и Уиддером ([1]) получено комплексное обращение преобразования типа свертки

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-t)\Phi(t)dt \tag{1.1}$$

ядер $G(t)$, у которых двусторонним преобразованием Лапласа является функция $1/E(z)$, где $E(z)$ — целая функция вида

$$E(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{a_k^2}\right),\quad 0<a_1<a_2<\ldots,\ \lim_{k\to\infty}\frac{k}{a_k}=\Omega>0. \tag{1.2}$$

В настоящей статье устанавливается комплексное обращение преобразования (1.1) ядер $G(t)$, для которых одностороннее обобщенное преобразование Лапласа

$$\int_0^{\infty}e^{-zt}G(t)t^{\alpha}dt \qquad -1<\alpha\leqslant 0. \tag{1.3}$$

есть функция $1/E(z)$, где $E(z)$ — целая функция экспоненциального типа, не имеющая на мнимой оси нулей и удовлетворяющая условию

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{\ln|E(iy)|}{y}=\sigma>0. \tag{1.4}$$

Известно (2), что в классе интегрируемых на $(0,\infty)$ функций с весом t^{α}, $-1<\alpha\leqslant 0$, $G(u)$ из (1.3) определяется следующим образом:

$$G(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\left\{i^{\alpha}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{E_1(itu;1+\alpha)}{E(it)}t^{\alpha}dt+i^{-\alpha}\int_0^{\infty}\frac{E_1(-itu;1+\alpha)}{E(-it)}t^{\alpha}dt\right. & \text{при } u>0\\ 0 & \text{при } u<0\end{cases} \tag{1.5}$$

где $E_1(z;1+\alpha)$ — функция типа Миттаг-Лефлера.

В конце статьи для более узкого класса ядер мы даем обращение преобразования (1.1) при помощи разложений Фурье—Аппеля.

При решении поставленной задачи нами использованы метод Хиршмана и Уиддера и аппарат оператора Римана—Лиувилля. Приведем некоторые определения, используемые в дальнейшем. Все эти понятия можно найти в работе ([3]).

Определение. Пусть $f(x)$ —произвольная функция из класса $L(0, l)$, $(0<l<\infty)$. Интегралом от $f(x)$ порядка $\alpha (0<\alpha<\infty)$ в смысле Римана—Лиувилля с началом в точке $x=0$ принято называть функцию

$$D_0^{-\alpha} f(x) \equiv D^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad x \in (0, l).$$

В частном случае при

$$f(x) = \frac{x^k}{\Gamma(1+k)}$$

имеем

$$D^{-\alpha}\left\{\frac{x^k}{\Gamma(1+k)}\right\} = \frac{x^{k+\alpha}}{\Gamma(1+k+\alpha)}.$$

Определение. Пусть $\alpha (0<\alpha<\infty)$, и целое число $p \geq 1$ определяется из условия $p-1<\alpha\leq p$, а $f(x) \in L(0, l)$ и функция

$$\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\left\{ D^{-(p-\alpha)} f(x) \right\}$$

почти всюду на $(0, l)$ имеет производную (не обязательно суммируемую на $(0, l)$). Тогда функция

$$D^\alpha f(x) \equiv \frac{d^p}{dx^p}\left\{ D^{-(p-\alpha)} f(x) \right\}$$

называется производной порядка $\alpha>0$ от функции $f(x)$ с началом в точке $x=0$.

Имеют место соотношения

$$D^\alpha\left\{\frac{r^k}{\Gamma(1+k)}\right\} = \frac{r^{k-\alpha}}{\Gamma(1+k-\alpha)}$$

$$D^\alpha D^{-\alpha} f(x) = f(x)$$

почти для всех $x \in (0, l)$.

Заметим, что если $f(z)$ аналитическая функция на некотором круге $|z|<R$ и

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1+n)} z^n,$$

то

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}f(re^{i\varphi}) \equiv G_{\varkappa}f(re^{i\varphi}), \quad \varkappa = \left\{\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\right\} \tag{1.6}$$

где применение оператора $G_{\varkappa}$ понимается в следующем смысле:

$$G_{\varkappa} f(re^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+k)} \cdot \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)} r^k e^{ik\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+k+\alpha)} z^k. \tag{1.7}$$

Очевидно, что оператор $G_{\varkappa}$ аддитивен и однороден и

$$G_{\varkappa} \cdot G_{1/\varkappa} = G_1, \quad \frac{1}{\varkappa} = \left\{\frac{\Gamma(1+k+\alpha)}{\Gamma(1+k)}\right\}, \tag{1.8}$$

где $G_1 f \equiv f$. Мы в дальнейшем будем пользоваться обоими символами в одном и том же смысле. Очевидно также, что если $f(z)$ аналитична в круге $(z) < R$, то $G_{\varkappa} f(z)$ аналитична в том же круге и что порядок и тип функций $f(z)$, $G_{\varkappa} f(z)$ одинаковы.

Ясно, что формулой (1.1) функция $f(x)$ определяется только для $x \in (-\infty, \infty)$, а для комплексного обращения преобразования (1.1) нужно, чтобы $f(x)$ была продолжена на некоторую область комплексной плоскости. Поэтому нужны дополнительные условия на ядро $G(t)$ и на функцию $\Phi(t)$. Мы показываем, что из условия, наложенного на $E(z)$, следует аналитичность $G(w)$ в полосе $|\operatorname{Im} w| < \alpha$ и что определенная формулой (1.1) функция $f(x)$ аналитически продолжается в полосе $|\operatorname{Im} w| < \alpha$ для достаточно широкого класса функций $\Phi(x)$. Эти результаты устанавливаются соответственно в следующих двух леммах.

Лемма 1.1. *Пусть $E(z)$ целая функция экспоненциального типа, не имеющая на мнимой оси нулей, и удовлетворяет условию (1.4). Тогда ядро $G(w)$, определенное формулой (1.5), является аналитической функцией в полосе $|v| < \alpha$ $(w = u + iv)$ и удовлетворяет условию*

$$G(u+iv) = o(|u|^{-n}) \text{ при } \forall n, \text{ при } |u| \to \infty \tag{1.9}$$

Доказательство. Для функции типа Миттаг-Лефлера известно (см. [2], стр. 430), что при $s=1$, $\mu = 1+\alpha$, $-1 < \alpha < 0$ имеет место оценка

$$E_1(z;\, 1+\alpha) = z^{-\alpha}e^z + 0\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{при} \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}. \tag{1.10}$$

Если теперь $h_n(\theta)$ — означает индикаторную функцию функции $E^{(n)}(z)$, то имеем $h_n(\theta) \leq h(\theta)$, где $h(\theta)$ - индикаторная функция $E(z)$. Следовательно из условия (1.4) следует

$$E^{(n)}(iy) = 0(e^{|y|(\alpha+1)}) \quad \text{при} \quad |y| \to \infty \tag{1.11}$$

и что

$$\frac{1}{E(iy)}=0(e^{-|y|(\alpha-\varepsilon)}) \quad \text{при} \quad |y|\to\infty. \tag{1.12}$$

Подставляя вместо $E_1(z;1+\alpha)$ в (1.5) асимптотическую формулу (1.10) и воспользовавшись оценками (1.11) и (1.12), интегрированием по частям получим требуемое.

Лемма 1.2. *Если $\Phi(x)\ (1+x^2)^{-N}\in L(-\infty,\infty)$ для некоторого $N>0$, тогда функция $f(x)$, определенная формулой (1.1), аналитична в полосе $|\operatorname{Im} x|<\alpha$.*

Доказательство следует из оценки (1.9) и из того факта, что ядро $G(t)$ аналитично в той же полосе.

Теорема 1.1. *Пусть $K(w)$ — преобразование Бореля функции $E(z)$. Тогда*

$$x^\alpha \lim_{s\to 1-} \int_{C_\rho} K(w)\ f(x+\rho w)dw=\psi(x) \tag{1.13}$$

где C_ρ — замкнутый контур, лежащий в полосе $|\operatorname{Im} w|<\frac{\alpha}{s}$, охватывающий индикаторную диаграмму функции $E(z)$, если

$$\hat{\Phi}(x)=0(e^{-\delta|x|})\ |x|\to\infty,\ \delta>0 \tag{1.14}$$

где

$$\hat{\Phi}(u)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\ \Phi(t)dt \tag{1.15}$$

есть преобразование фурье функции $\psi(x)$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)f(x+\rho w)dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)dw\int_{-\infty}^{\infty} G(x+\rho w-t)\Phi(t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)dt\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)G(x+\rho w-t)dw. \tag{1.16}$$

Перемена порядка интегрирования возможна, так как если $w\in C_\rho$, то $x+\rho w\in[w;\ |\operatorname{Im} w|<\alpha]$, где функции f и G аналитичны и, следовательно, внутренний интеграл первого равенства сходится равномерно.

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)G(x+\rho w-t)dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} K(w)dw\,\frac{1}{2\pi}\times$$

$$\times\left\{i^\alpha\int_0^\infty\frac{E_1[iu(x+\rho w-t);\,1+\alpha]}{E(iu)}u^\alpha du+i^{-\alpha}\int_0^\infty\frac{E_1[-iu(x+\rho w-t);1+\alpha]}{E(-iu)}u^\alpha du\right\}-$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{i^{\alpha} u^{\alpha}}{E(iu)} du \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} K(w) E_1[iu(x+\rho w-t);\ 1+\alpha]\, dw +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{i^{-\alpha} u^{\alpha}}{E(-iu)} \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} K(w) E_1[-iu(x+\rho w-t);\ 1+\alpha]\, dw.$$

Здесь перемена порядка интегрирования возможна, так как интеграл (1.5) сходится равномерно на C_ρ, если заменить w на $x+\rho w-t$.

Введем обозначения

$$I_1(x, \rho, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} K(w) E_1[iu(x+\rho w-t);\ 1+\alpha]\, dw,$$

$$I_2(x, \rho, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} K(w) E_1[-iu(x+\rho w-t);\ 1+\alpha]\, dw.$$

Имеем

$$G_{1/\alpha} I_1(x, \rho, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} K(w) e^{iu(x+\rho w-t)}\, dw =$$

$$= e^{iu(x-t)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} K(w) e^{iu\rho w}\, dw = e^{iu(x-t)} E(iu\rho). \tag{1.17}$$

Следовательно

$$I_1(x, \rho, t) = E(iu\rho) E_1[iu(x-t);\ 1+\alpha]. \tag{1.18}$$

Аналогично получим, что

$$I_2(x, \rho, t) = E(-iu\rho) E_1[-iu(x-t);\ 1+\alpha]. \tag{1.19}$$

Обозначим через $I(x, \rho)$ следующий интеграл:

$$I(x, \rho) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} K(w) f(x+\rho w)\, dw.$$

Имеем

$$G_{1/\alpha} I(x, \rho) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt \, \frac{i^{\alpha}}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{E(iu\rho)}{E(iu)} u^{\alpha} e^{iu(x-t)} du +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt \, \frac{i^{-\alpha}}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{E(-iu\rho)}{E(-iu)} u^{\alpha} e^{-iu(x-t)}\, du =$$

$$=\frac{i^\alpha}{2\pi}\int_0^\infty \frac{E(iu\rho)}{E(iu)}u^\alpha e^{iux}\hat{\Phi}(u)du+\frac{i^{-\alpha}}{2\pi}\int_0^\infty \frac{E(-iu\rho)}{E(-iu)}u^\alpha e^{-iux}\hat{\Phi}(-u)du, \quad (1.20)$$

где $\hat{\Phi}(u)$—преобразование Фурье функции $\Phi(x)$.

Из предположения (1.14) будем иметь

$$\lim_{\rho\to 1-} G_{1/\alpha} f(x, \rho)=\lim_{\rho\to 1-}\frac{i_\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E(iu\rho)}{E(iu)}u^\alpha e^{iux}\hat{\Phi}(u)du=$$

$$=\frac{i^\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}u^\alpha\,\hat{\Phi}(u)du. \quad (1.21)$$

Остается заметить, что

$$\frac{i^\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}u^\alpha\,\hat{\Phi}(u)du=x^{-\alpha}\Phi(x).$$

Замечание. Для ядер $G(u)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{E(z)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt}G(t)dt,$$

где $E(z)$—квазицелая функция, допускающая разложение

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{nh}$$

для некоторого $h>0$, можно дать другую формулу обращения преобразования типа свертки

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\Phi(t)dt$$

Для этих целей обозначим $A_n(t)$ обобщенные многочлены Аппеля

$$E(z)E_1(zx)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{nh}A_n(x)$$

где $E_1(zx)$ — квазицелая функция, допускающая разложение

$$E_1(zx)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{zx^{nh}}{\Gamma(1+nh)}.$$

Легко доказывается, что тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)A_n(t)dt=\frac{x^{nh}}{\Gamma(1+nh)}$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} D^{kh} G(x-t)\Big|_{x=0} A_n(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n \\ 1 & \text{при } k = n. \end{cases}$$

Это наводит на мысль, что функцию $\Phi(x)$ можно восстановить при помощи ряда Фурье—Аппеля

$$\Phi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n A_n(x),$$

где

$$\Phi_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} D^{nh} G(x-t)\Big|_{x=0} \Phi(t)dt.$$

Пользуясь свойством единственности преобразования типа свертки, доказывается, что если

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\Phi(t)dt$$

то

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D^{nh} f(x)\Big|_{x=0} \cdot A_n(x).$$

Например, если

$$G(t) = t^{h-1} \quad \text{при } h > -2$$

то

$$A_n(x) = \frac{x^{nh}}{\Gamma(1+nh)}$$

и если

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} (x-t)^{h-1}\Phi(t)dt,$$

то

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} D^{nh} f(x)\Big|_{x=0} \cdot \frac{x^{nh}}{\Gamma(1+nh)}.$$

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Վ. Մ. ՍԻԳԱՐՅԱՆ

Ընդհանրացված ծալքի տիպի ձևափոխության կոմպլեքս շրջում

Հիրշմանի և Ուիդերի կողմից (1) *ստացված է*

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\Phi(t)dt \tag{1}$$

ծալքի տիպի ձևափոխության կոմպլեքս շրջումը, որի $G(t)$ կորիզի երկկող-մանի Լապլասի ձևափոխությունն է հանդիսանում $1/E(z)$ ֆունկցիան, որտեղ

$$E(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{a_k^2}\right),\quad 0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\ .\ .\ .,\ \lim_{k\to\infty}\frac{k}{a_k}=\Omega>0. \tag{2}$$

Աշխատանքում բերվում է (1) ձևափոխության կոմպլեքս շրջումը այնպիսի $G(t)$ կորիզների համար, որոնց միակողմանի ընդհանրացված Լապլասի ձևա-փոխությունն է՝

$$\int_0^{\infty} G(t)t^{\nu} e^{-zt}dt=\frac{1}{E(z)}, \tag{3}$$

որտեղ $E(z)$ էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիա է, որը կեղծ առանցքի վրա չունի զրոներ և բավարարում է

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{\ln|E(iy)|}{y}=\alpha>0 \tag{4}$$

պայմանին։ Խնդիրը լուծելու համար օգտագործվել է Հիրշմանի և Ուիդերի աշխատանքի մեթոդը և Ռիման-Լիուվիլի օպերատորի ապարատը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Хиршман* и *Уиддер*, Преобразование типа свертки. М., 1958. [2] *М. М. Джрбашян*. ИАН СССР, сер. мат., 18, 427—448 (1954). [3] *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966