ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 5

УДК 513.8

МАТЕМАТИКА

В. М. Мартиросян

Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 1/VII 1976)

1°. В работе М. М. Джрбашяна ([1]) был дан метод построения систем функций $\{r_k(z);\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональных на окружности $|z|=1$.

Позже в его работе ([2]) было показано, что примененный в работе ([1]) метод эффективен также для построения систем функций, биортогональных на вещественной оси*.

Биортогональные системы М. М. Джрбашяна $\{r_k(z);\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$, а также важные свойства этих систем, установленные в его работах ([1]) ([4]), послужили основой для полного решения ряда задач анализа (см. ([1]), ([2]), ([3]), ([4]), ([5]), ([6])).

В настоящей заметке методом, примененным в работах ([1]), ([2]), на границе L_ρ угловой области $\Delta(\rho)$ строятся биортогональные системы типа М. М. Джрбашяна $\{r_k(\zeta);\ \Omega_k(\zeta)\}_1^\infty$. Затем на основе ряда результатов работы ([4]) устанавливается критерий базисности системы $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ в метрике классов $H_2[\rho;\ \omega]$, введенных в заметке ([7]) и подробно рассмотренных в монографии ([8]).

Этот критерий позволяет дать полное решение задачи кратной интерполяции в угловых областях, а также установить критерий базисности систем функций типа Миттаг—Леффлера, введенных в заметке М. М. Джрбашяна ([9]), и систем функций типа Миттаг—Леффлера, рассмотренных в заметке автора ([10]).

2°. Пусть $H_2[\alpha;\ \omega]$ $(1/2<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1)$—известный ([8]) класс функций $F(z)$, голоморфных в угловой области

$$\Delta(\alpha)=\{z;\ |\arg z|<\pi/(2\alpha),\ 0<|z|<+\infty\} \tag{1}$$

и подчиненных условию

* Подробные литературные указания по этому поводу см. в работе ([3]).

$$\| F \|^*_{\alpha,\omega} = \sup_{|\varphi| < \pi/2\alpha} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega} dr \right\}^{1/2} < +\infty. \tag{2}$$

Обозначим через $L_{2,\omega}(L_\alpha)$ класс функций $F(\zeta)$, измеримых на границе L_α области $\Delta(\alpha)$ и таких, что

$$\| F \|_{\alpha,\omega} = \left\{ \int_{L_\alpha} |F(\zeta)|^2 \, |\zeta|^{\omega} \, |d\zeta| \right\}^{1/2} < +\infty. \tag{3}$$

Известно ([8]), что *любая функция* $F(z) \in H_2[\alpha; \omega]$ *почти всюду на* L_α *имеет угловые граничные значения* $F(\zeta) \in L_{2,\omega}(L_\alpha)$.

Можно показать, что $H_2[\alpha; \omega]$ *является замкнутым подпространством гильбертова пространства* $L_{2,\omega}(L_\alpha)$.

3°. Впредь полагаем, что

$$\frac{1}{2} < \alpha < +\infty, \quad \rho = \alpha/(2\alpha - 1), \quad -1 < \omega < 1 \tag{4}$$

и $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\alpha)$, а $s_k \geq 1$, $p_k \geq 1$ — кратности появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$ и во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ соответственно.

Последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ отнесем к классу $\Delta_{\alpha,p}$, если

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_j}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k^\alpha - \lambda_j^\alpha}{\lambda_k^\alpha + \bar{\lambda}_j^\alpha} \right| \geq \delta > 0, \tag{5}$$

$$\sup_{k \geq 1} \{ p_k \} = p < +\infty. \tag{6}$$

Отметим, что из условия (5) вытекает условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|^{2\alpha})^{-1} \operatorname{Re} \lambda_k^\alpha < +\infty, \tag{7}$$

обеспечивающее существование бесконечного произведения ([9])

$$B_\alpha(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z^\alpha - \lambda_k^\alpha}{z^\alpha + \bar{\lambda}_k^\alpha} \, \frac{|1 - \lambda_k^{2\alpha}|}{1 - \lambda_k^{2\alpha}}, \quad z \in \Delta(\alpha). \tag{8}$$

4°. Рассматривая систему рациональных функций

$$r_k(\zeta) = (s_k - 1)! \, (\zeta + \lambda_k)^{-s_k} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

в работе ([11]) С. А. Акопян и И. О Хачатрян при условии (7) дали полную внутреннюю характеристику ее замыкания в метрике $L_{2,\omega}(L_\rho)$, а в заметках ([12]), ([10]) был установлен критерий замкнутости этой системы в метрике $H_2[\rho; \omega]$.

Отметим, что *если условие* (7) *не выполняется, то система* (9) *не минимальна в* $H_2[\rho; \omega]$ и, следовательно, не имеет биортогонального дополнения.

При условии (7), пользуясь методом, примененным в работах ([1]), ([2]), можно построить систему функций $\{\Omega_k(\zeta)\}_1^\infty$, биортогональную с системой $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ в следующем смысле:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho} r_k(\zeta)\Omega_\nu(\zeta)d\zeta = \delta_{k\nu} = \begin{cases} 1, & k=\nu; \\ 0, & k\neq\nu, \end{cases} \quad (k,\ \nu=1,\ 2,\ \ldots), \tag{10}$$

причем направление на L_ρ совпадает с направлением неубывания $\arg\zeta$.

Система $\{\Omega_k(\zeta)\}_1^\infty$ определяется следующим образом:

$$\Omega_k(\zeta) = (-1)^{s_k+1}T_k(-\zeta)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{11}$$

где

$$T_k(z) = \frac{B_\alpha(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)^{p_k-s_k-\nu+1}}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{12}$$

$$a_\nu(\lambda_k) = \frac{1}{\nu!}\left\{\frac{d^\nu}{dz^\nu}\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{B_\alpha(z)}\right\}_{z=\lambda_k}\quad (\nu=0,\ 1,\ \ldots;\ k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{13}$$

Теорема 1. *Условие $\{\lambda_k\}_1^\infty\in\Delta_{\alpha,\rho}$ достаточно для справедливости следующих утверждений:*

1. *Система $\{|\lambda_k|^{-\omega/2}(|\lambda_k|^{1-\alpha}\operatorname{Re}\lambda_k^\alpha)^{s_k-1/2}r_k(\zeta)\}_1^\infty$ образует базис, эквивалентный ортонормированному, в замыкании своей линейной оболочки в метрике $H_2[\rho;\ \omega]$.*

2. *Каждая функция $f(\zeta)$ из замыкания линейной оболочки системы $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ в метрике $H_2[\rho;\ \omega]$ единственным образом разлагается в ряд*

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^\infty c_k(f)r_k(\zeta),\quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho} f(\zeta)\Omega_k(\zeta)d\zeta, \tag{14}$$

сходящийся абсолютно и равномерно вне замыкания $\overline{E}$ множества точек $E=\{-\lambda_k\}_1^\infty$ и в метрике $H_2[\rho;\ \omega]$ на границе L_ρ области $\Delta(\rho)$.

Теорема 2. *Условие $\{\lambda_k\}_1^\infty\in\Delta_{\alpha,\rho}$ необходимо и достаточно для того, чтобы система $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ образовала базис (безусловный базис) в замыкании своей линейной оболочки в метрике $H_2[\rho;\ \omega]$.*

Теорема 3. *Условие $\{\lambda_k\}_1^\infty\in\Delta_{\alpha,\rho}$ необходимо и достаточно для того, чтобы система $\{T_k(z)\}_1^\infty$ образовала базис (безусловный базис) в замыкании своей линейной оболочки в метрике $H_2[\alpha;\ \omega]$.*

5°. Последовательность $\gamma=\{\gamma_k\}_1^\infty$ комплексных чисел условимся относить к классу $l^2_\omega\{\lambda_k\}$, если

$$\sum_{k=1}^\infty|\lambda_k|^\omega(|\lambda_k|^{1-\alpha}\operatorname{Re}\lambda_k^\alpha)^{2s_k-1}|\gamma_k|^2<+\infty. \tag{15}$$

На функциях класса $H_2[\alpha;\ \omega]$ определим линейный оператор $T_{\alpha,\omega}$, положив

$$T_{\alpha,\omega}[f] = \{|\lambda_k|^{\omega/2}(|\lambda_k|^{1-\alpha}\operatorname{Re}\lambda_k^\alpha)^{s_k-1/2}f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\}_1^\infty,\quad f\in H_2[\alpha;\ \omega]. \tag{16}$$

Теорема 4. *Условие* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_{\alpha,\rho}$ *необходимо и достаточно для того, чтобы имело место равенство*

$$T_{\alpha,\omega}\{H_2[\alpha;\ \omega]\} = l^2. \tag{17}$$

Теорема 5. *Пусть* $\gamma = \{\gamma_k\}_1^\infty \in l^2_\omega\{\lambda_k\}$. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_{\alpha,\rho}$, *то ряд*

$$f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k T_k(z) \tag{18}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри области $\Delta(\alpha)$, *в метрике* $H_2[\alpha;\ \omega]$ *на ее границе* L_α *и определяет функцию* $f_0(z) \in H_2[\alpha,\ \omega]$, *удовлетворяющую следующим интерполяционным условиям:*

$$f_0^{(s_k-1)}(\lambda_k) = \gamma_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{19}$$

Теорема 6. *Пусть* $w = \{w_k\}_1^\infty$ — *произвольная последовательность комплексных чисел. Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \overline{\in} \Delta_{\alpha,\rho}$, *то*

$$T_w\{H_2[\alpha;\ \omega]\} \neq l^2, \tag{20}$$

где линейный оператор T_w *определяется на функциях класса* $H_2[\alpha;\ \omega]$ *следующим образом:*

$$T_w[f] = \{w_k f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\}_1^\infty,\ f \in H_2[\alpha;\ \omega]. \tag{21}$$

6°. В заметках ([13]), ([9]) М. М. Джрбашян ввел в рассмотрение обобщенную систему Мюнца-Саса $\{e^{\lambda_k^{\rho}} x^{(s_k-1)}\}_1^\infty$ ($\mathrm{Re}\,\lambda_k > 0$), отметил критерий замкнутости этой системы в $L_2(0,\ +\infty)$ и впервые дал полную внутреннюю характеристику ее замыкания в $L_2(0,\ +\infty)$ в случае незамкнутости.

В заметке ([9]) им была введена в рассмотрение система функций типа Миттаг-Леффлера

$$\omega_\rho^*(x;\ \lambda_k) = E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x;\ \mu)\, x^{s_k-1} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{22}$$

где $\mu = (1 + \omega + \rho)/(2\rho)$,

$$E_\rho(z;\ \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\mu + n\rho^{-1}), \tag{23}$$

и установлен критерий замкнутости этой системы в $L_{2,\omega}(0,\ +\infty)$, являющийся существенным обобщением классической теоремы Мюнца-Саса.

$L_{2,\omega}(0,\ +\infty)$ определяется, как класс функций $f(x)$, измеримых на полуоси $(0,\ +\infty)$ и таких, что

$$\| f \|_{L_{2,\omega}(0,+\infty)} = \left\{ \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 x^\omega\, dx \right\}^{1/2} < +\infty. \tag{24}$$

В работе ([11]) была дана полная внутренняя характеристика замыкания в метрике $L_{2,\omega}(0,\ +\infty)$ незамкнутой системы (22).

Теорема 7. *Условие* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_{\alpha,\rho}$ *необходимо и достаточно* *для того, чтобы система* $\{\omega_\rho^*(x;\lambda_k)\}_1^\infty$ *образовала базис (безусловный базис) в замыкании своей линейной оболочки в метрике* $L_{2,\omega}(0,+\infty)$.

Отметим, что в специальном случае $\omega=0$, $\alpha=\rho=\mu=1$, $s_k=1$ ($k=1, 2, \ldots$), если учесть, что $E_1(z;1)=e^z$, эта теорема была установлена в работе В. И. Гурария и В. И. Мацаева [14] для положительных возрастающих λ_k, а в работе Н. К. Никольского и Б. С. Павлова [15] — для комплексных λ_k ($\mathrm{Re}\,\lambda_k>0$).

7°. Положив

$$\alpha/(2\alpha-1)<\rho_1<+\infty,\quad \mu_1=(1+\omega+\rho_1)/(2\rho_1),\quad \gamma^{-1}=2-(\alpha^{-1}+\rho_1^{-1}), \tag{25}$$

рассмотрим систему функций типа Миттаг-Леффлера

$$\omega^*_{\rho_1}(z;\lambda_k)=E^{(s_k-1)}_{\rho_1}(-\lambda_k z;\mu_1)\,z^{s_k-1}\quad (k=1, 2, \ldots). \tag{26}$$

В заметке [12] в случае $\omega=0$, $1<\alpha<+\infty$, $\rho_1=1$, а затем в заметке [10] в общем случае, был установлен критерий замкнутости системы (26) в метрике $H_2[\gamma;\omega]$, а в случае незамкнутости была дана полная внутренняя характеристика ее замыкания.

Теорема 8. *Условие* $\{\lambda_k\}_1^\infty\in\Delta_{\alpha,\rho}$ *необходимо и достаточно для того, чтобы система* $\{\omega^*_{\rho_1}(z;\lambda_k)\}_1^\infty$ *образовала базис (безусловный базис) в замыкании своей линейной оболочки в метрике* $H_2[\gamma;\omega]$.

Отметим, что в крайнем случае, когда $\rho_1=\alpha/(2\alpha-1)$ ($\gamma=+\infty$), если условимся отождествлять пространства $H_2[+\infty;\omega]$ и $L_{2,\omega}(0,+\infty)$, эта теорема переходит в теорему 7.

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность моему научному руководителю, академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну, за постановку задач и руководство при выполнении настоящей работы.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ սիստեմների բազիսությունը և ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումը անկյունային տիրույթում

Ներկա աշխատանքում բերված է $H_2[\rho;\omega]$ *դասում պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների բազիսության հայտանիշը։ Այդ հայտանիշը թույլ է տալիս լուծել ինտերպոլյացիոն խնդիրը անկյունային տիրույթում։ Բերված է նաև Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից մտցրած Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների սիստեմների* $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ *մետրիկայում բազիսության հայտանիշը։*

Ի վերջո, բերված է հեղինակի կողմից դիտարկված Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների սիստեմների $H_2[\gamma; \omega]$ մետրիկայում բազիսության հայտանիշը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, «Известия АН Арм. ССР», матем., VIII, № 5, 384—409 (1973). [2] *М. М. Джрбашян*, Матем. сб., т. 95 (137), № 3 (11), 418—444 (1974). [3] *М. М. Джрбашян*, Матем. сб., т. 91 (133), № 4 (8), 580—626 (1973). [4] *М. М. Джрбашян*, «Известия АН Арм. ССР», матем., IX, № 5, 339—373 (1974). [5] *Г. М. Айрапетян*, «Известия АН Арм. ССР» матем., VIII, № 6, 429—450 (1973). [6] *Г. М. Айрапетян*, «Известия АН Арм. ССР», матем., X, № 2, 133—152 (1975). [7] *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*, ДАН СССР, т. 120, № 3, 457—460 (1958). [8] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966. [9] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 219, № 6, 1302—1305 (1974). [10] *В. М. Мартиросян*, ДАН Арм. ССР, т. 62, № 5 (1976). [11] *С. А. Акопян, И. О. Хачатрян*, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 40, № 1, 96—114 (1976). [12] *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян*, ДАН СССР, т. 225, № 5, 1001—1004, (1975). [13] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 141, № 3, 539—542 (1961). [14] *В. И. Гурарий, В. И. Мацаев*, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 30, № 1, 3—14 (1966). [15] *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов*, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 34, № 1, 90—133 (1970).